أساسيات فيزياء الجوامد

تأليف

دكتور / رأفت كامل واصف

أستاذ الفيزياء - كلية العلوم - جامعة القاهرة

رئيس الشبكة العربية لتعليم الفيزياء - يونسكو



أساسيات فيزياء الجوامد

تأليف

دكتور / رأفت كامل واصف

أستاذ الفيزياء ـ كلية العلوم ـ جامعة القاهرة

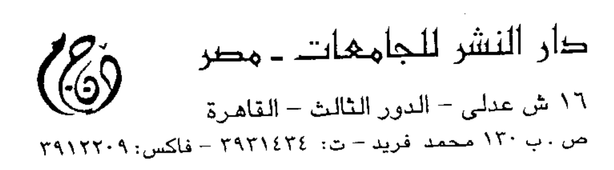
رئيس الشبكة العربية لتعليم الفيزياء ـ يونسكو

رقم الإيداع : ٩٣٣٠/ ١٩٩٤م

I.S.B.N : 977 - 5526 - 13 - 2

الطبعة الثانية

١٤١٩هـ ـ ١٩٩٨م



دار النشر للجامعات ـ مصر

١٦ ش عدلى – الدور الثالث – القاهرة

ص . ب ١٣٠ محمد فريد – ت: ٣٩٣١٤٣٤ – فاكس: ٣٩١٢٢٠٩

نبذة عن المؤلف

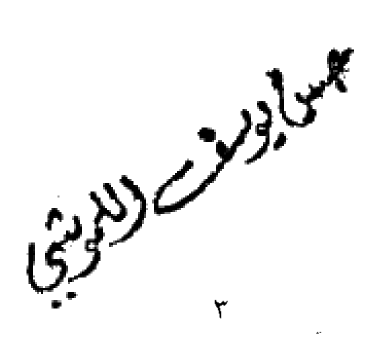
تدرج الدكتور رأفت كامل واصف فى مراحل التعليم المصرى حتى حصل من جامعة القاهرة على بكالريوس العلوم فى الفيزياء بمرتبة الشرف عام ١٩٤٦ والماجستير عام ١٩٥٠ ودكتوراه الفلسفة عام ١٩٥٤ ودكتوراه العلوم عام ١٩٦٨. ومنذ تعيينه ضمن أعضاء هيئة التدريس بجامعة القاهرة عام ١٩٤٦ وهو يجرى بحوثه فى علم الجوامد وقد نشر أكثر من مائه وثلاثين بحثا فى المجلات العلمية العالمية، وأشرف على العديد من درجات الماجستير والدكتوراه وتنتشر مدرسته العلمية فى مصر وفى العالم الخارجى .

حصل الدكتور رأفت كامل على كرسى فيزياء الجوامد بجامعة القاهرة عام ١٩٦٩، ثم عين رئيسا لقسم الفيزياء عام ١٩٧٤، وقد حصل على جائزة الدولة التشجيعية عام ١٩٦٣ وعلى وسام العلوم والفنون مرتين عامى ١٩٦٣ ، ١٩٨٦ .

ويعمل الدكتور رأفت كامل أيضا كخبير فى مجمع اللغة العربية بالقاهرة .

فى المجال المحلى أنشأ الجمعية المصرية لعلوم الجوامد وتطبيقاتها، ونشر المجلة المصرية لعلوم الجوامد منذ اكثر من خمسة عشر عاما. كما أنشأ الشبكه العربية لتعليم الفيزياء "ارابن" التى يصدر من خلالها المجلة العربيه للفيزياء التطبيقية والتعليم، كما انه يصدر نشره علوم مبسطة باسم " أنباء ارابن " توزع عن طريق مكتب روستاس للدول العربية.

أما فى المجال الدولى فقد انتخب أربع مرات من قبل الاتحاد الدولى للفيزياء البحتة والتطبيقية IUPAP ، عضواً فى اللجنة الدوليه لتعليم الفيزياء ICPE منذ عام ١٩٨١ وحتى الآن . كما أنه يعمل مع اليونسكو لتطوير تعليم الفيزياء فى المرحلة الجامعية الأولى.





مقدمــة الكتاب

لعلم الفيزياء ، كما هو معروف ، أهمية كبيرة بين سائر العلوم الأساسية ، إذ إنه يكون حجر الأساس الذى لا غنى عنه فى جميع مجالات العلوم المختلفة . لقد كان تطور علم الفيزياء فى القرن العشرين بمثابة ثورة شاملة فى مفاهيمنا لطبيعة المادة والطاقة والإشعاع، وكانت الحقبة الأخيرة من هذا القرن على قمة التطور مما استوجب قسمة علم الفيزياء إلى فيزياء كلاسيكية وأخرى معاصرة . ولما كان التطور التكنولوجى الكبير المصاحب لهذه الاكتشافات ، فى حاجة دائما إلى نوعيات خاصة جدا من المواد التى لها صفات ، يستلزمها نجاح المشروعات الضخمة التى تقوم بها الدول - لذلك أصبح الإهتمام بتدريس الطبيعة الذرية للمادة وأثرها على الخواص الماكروسكوبية لها أمراً ضروريا ، فتعددت الكتب الأجنبية التى تعنى بطبيعة الجوامد والحالة المكثفة ، وكان لزاما على العلماء العرب إثراء المكتبة العربية بمرجع فى هذا الموضوع يخدم الطالب ، ويساعده على فهم القوانين التى تحكم هذا العالم الواسع الذى نطلق عليه الجوامد وما هو بجامد ،إذ إن ذراته وإلكتروناته دائمة لحركة تتحدد بموجبها صفاته وتصرفه تحت ظروف التشغيل المختلفة .

ولذلك فإننى أتقدم لأبنائى الطلبه المصريين والعرب الذين يهتمون بدراسة الحالة المكثفة وطبيعة المادة بهذا المرجع المكتوب بلغتهم العربيه ، لغة الأم ، مما سيساعدهم على فهم أفضل لهذا العلم الذى تبنى عليه معظم التكنولوجيات الحديثة . ولما كانت المادة سواء فى حالتها الصلبة والسائلة أو الغازية تتكون من أعداد كبيرة جدا من الذرات أو الجزيئات وتتوقف طبيعتها على طبيعة مجاميع ذراتها أو جزيئاتها ، لذلك فقد راعيت أن أبدأ بالتعريف بموضوع بالفيزياء الإحصائية ، ثم أعقبت ذلك بالتعريف بمكونات الذرة وماهية تركيبها الداخلى ومستويات طاقاتها الإلكترونية ، لكى تكون واضحةً ، خلفية الصوره التى سنعطيها للمادة فى حالتها المكثفة . وإنى أرى هذا المرجع يصلح لطلاب المراحل النهائية فى الجامعات والمعاهد العليا الذين يدرسون فيزياء الجوامد . إذ إنه ييسر لهم سبل المعرفة

بأحدث النظريات فى تركيب المادة ومكوناتها الأساسية ، كما يتيح كذلك تفسير الظواهر الطبيعية التى تنشأ عن التجمعات الذرية أو الجزيئية وكيفية معالجتها باسلوب احصائى .

وفقنا الله إلى ما فيه الخير للجميع .

المؤلف

الباب الأول

فيزياء إحصائية STATISTICAL PHYSICS

يعالج علم الميكانيكا الإحصائية حركة المجاميع الكبيرة من الأجسام (مثل جزيئات غاز) وخواص هذه المجاميع والقوانين التى تحكمها .

تتكون أى مادة سواء فى حالتها الصلبة أو السائلة أو الغازية من أعداد كبيرة جدا من الذرات أو الجزيئات الدائمة الحركة ، والتى يربط بينها قوى بينية تكون كبيرة فى حالة المواد الصلبة وصغيرة في حالة الغازات . مثلا : فى ١ كيلو جرام جزيئى Kilomole يوجد عدد من الجزيئات يسمى عدد أفوجادرو ويساوى ٦,٠٢ × ١٠ [٢٦] جزىء ولإثبات أن ذرات أو جزيئات المادة دائبة لحركة تجرى عادة التجارب البسيطة التالية :

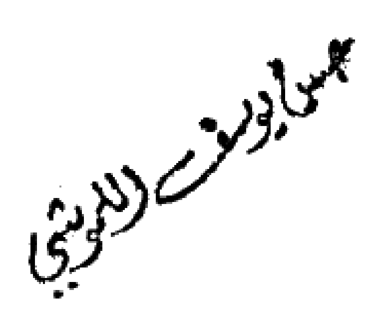
١ – فى حالة **الغازات** : تجربة الدخان . أو عند فتح زجاجة عطر فان رائحتها تظهر على بعد أمتار فى ثوان قليلة .

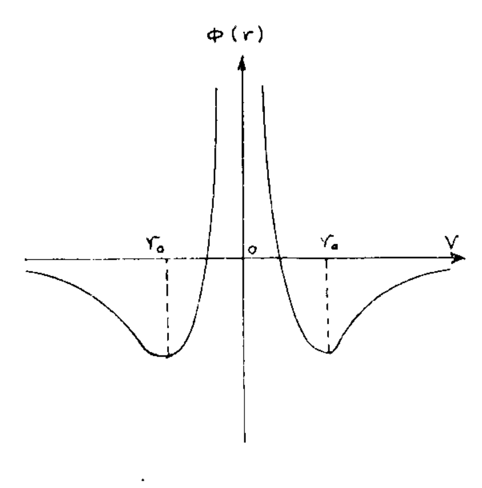
٢ – وفى حالة **السوائل** : قطرة حبر فى ماء نقى تنتشر تماما فى فترة وجيزة .

٣ – فى حالة **الجوامد** : تجربة انتشار الرصاص فى الذهب وبالعكس .

١ – ١ الخواص الطبيعية للمواد تتوقف على طبيعة مجاميع ذراتها أو جزيئاتها :

التمدد : إذا كانت ذرات المادة تشغل أماكن محددة تحت تأثير القوى البينية بينها ، فعند رفع درجة الحرارة تتذبذب كل ذرة أو جزىء حول وضع اتزانه فى بئر الجهـــد (شكل ١ – ١) وتزداد سعة الذبذبة برفع درجة الحرارة . وهذه تظهر على شكل تمدد خارجى .





شكل(١-١)

الانصهار : إذا وصلت درجة الحرارة لدرجة الانصهار فإن طاقة حركة الجزيئات أو الذرات تكون من الكبر ، بحيث تستطيع التغلب على قوى الترابط بين الذرات ، مما يسبب كسر الحالة الصلبة وتحويلها إلى حالة سائلة .

شكل وحجم الجسم : تكون القوى البينية فى الجوامد كبيرة جدا ، وهذا ما يحفظ شكل وحجم الجسم الصلب ثابتا لا يتغير عند نفس الدرجة ، أما بالنسبة للسوائل تكون قوى الترابط أقل ، ولذلك فإن جزيئات السائل تكون أكثر حرية للحركة ، وبالتالى يتشكل السائل بشكل الإناء الذى يحتويه بينما يظل حجمه ثابتا . أما بالنسبة للغازات تكون قوى الترابط بين الجزيئات صغيرة جدا . وبالتالى فإنها تكون حرة الحركة وتشغل دائما جميع الحجم الذى توضع فيه ، أى أنها لا تحتفظ بشكل أو بحجم .

البخر من السوائل : تختزن الأجسام طاقتها الحرارية على شكل طاقة حركة جزيئاتها . وليس من المعقول أن تتساوى طاقات الحركة لهذه الملايين الكثيرة من الجزيئات . ولكن عادة تكون للاغلبية طاقة متوسطة هى التى تعرف الحالة الحرارية للمادة .

ومن الملاحظ أنه عند هروب الجزيئات ذات طاقة الحركة الكبيرة من سطح السائل ، مما يتسبب عنه ما يعرف بالبخر ، تقل طاقة الحركة المتوسطة لمجموعة الجزيئات المتبقية وبالتالى تنخفض درجة الحرارة وهى حقيقة معروفة بالتبريد بواسطة البخر .

الميكانيكا الإحصائية تعد بداية لتحويل دراستنا الطبيعية من الحالة الماكروئية إلى الحالة الميكروسكوبية .

وقد كانت نظرية الحركة للغازات هى بداية الطريق فى هذا المضمار ولذلك سندرسها بالتفصيل . وبالرغم من الفروض المبسطة التى بنيت عليها نظرية الحركة للغازات ، فإن النتائج التى تحصلنا عليها منها أصبحت تطبق على مثل هذه المجاميع من الأجسام التى يمكن أن تعد حرة تقريبا .

١ - ٢ نظرية الحركة للغاز التام

الفرق بين الميكانيكا الإحصائية وميكانيكا الجسم المتماسك :

بدأ علم الفيزياء الإحصائية على يدى ماكسويل وبولتزمان ، بدراسة مجاميع من الأجسام الصغيرة المتشابهة ، والتى تتحرك بدون ارتباط مع بعضها البعض . ويمكن تمثيل هذه المجاميع فى أبسط صورها بحالة غاز تام .

تركيب الغاز التام مستنتجة من قوانين الغازات

وجد أن جميع الغازات عند الضغوط الصغيرة تتبع القوانين البسيطة التالية :

١ - **قانون بويل** : وينص على أنه لكتلة معينة من الغاز يتناسب ضغط الغاز عكسيا مع حجمه طالما حفظت درجة الحرارة ثابتة $P \alpha \frac{1}{V}$.

٢ - **قانون شارل** : إذا سخنت كتلة معينة من الغاز تحت حجم ثابت فإن الضغط يزداد طرديا مع زيادة درجة الحرارة . $P \propto T$.

٣ - **قانون دالتون للضغوط الجزئية** : ضغط خليط من غازات مختلفة على جدران الإناء الحاوى لها يساوى مجموع الضغوط التى تؤثر بها هذه الغازات على الجدران

لو أن كل منها وجد على حدة فى نفس الحجم .

$$P = \sum_i P_i$$

٤ – **قانون جول** : الطاقة الداخلية للغاز لا تتوقف على حجمه بمعنى أننا إذا تركنا الغاز يتمدد فى الفراغ فلن يحدث هناك فقدان للطاقة .

٥ – **قانون جاى لوساك** : عندما تتفاعل الغازات كيميائيا ويكون ناتج التفاعل غازيا أيضا ، تكون نسبة الغازات المتفاعلة والغاز الناتج هى نسبة بسيطة .

٦ – **قانون أفوجادرو** : الحجوم المتساوية من الغازات عند نفس درجة الحرارة والضغط تحتوى على **نفس العدد من الجزيئات** .

من واقع القوانين السابقة يمكن وصف تركيب الغاز التام وهو الذى يخضع تماما لجميع القوانين السابقة ، كما يأتى :

يتركب الغاز التام من جزيئات لها الخواص التالية :

١ – جزيئات الغاز عبارة عن **كرات صلبة ملساء** تامة المرونة .

٢ – الجزيئات **فى حالة حركة مستمرة** تتصادم مع بعضها البعض ، وكذلك مع جدران الإناء الذى يحتويها .

٣ – **تتناسب درجة حرارة الغاز** المطلقة مع متوسط **طاقة حركة الجزيئات** .

٤ – **لا يوجد بين الجزيئات قوى جزيئية** .

٥ – **الحجم الفعلى للجزيئات** لا يشغل إلا جزءا متناهيا فى الصغر من الحجم الكلى للإناء المحتوى للغاز .

للتدليل على صحة الفروض السابقة عن تركيب الغاز التام نفرض **أولا أن الجزيئات ليست ملساء أو تامة المرونة** : معنى ذلك أن جزءا من طاقة حركتها يفقد بالتصادم ، حيث إن خشونة السطح تستهلك جزءا من الطاقة .

أى إننا كلما تركنا الغاز لحالة لمدة طويلة فإن طاقته تقل تدريجيا ، نتيجة للتصادم وتكون النتيجة نقصاً مستمراً فى الطاقة الداخلية للغاز ، وهذا ضد قانون جول .

ثانيا – لو لم تكن **حركة الجزيئات عشوائية** فى كل الاتجاهات ، لأمكن تجميع الجزيئات فى جزء فقط من الحجم ، دون باقى الأجزاء وهذا غير صحيح .

١ – ٢ معادلة الحالة للغاز التام :

حساب ضغط الغاز :

لإيجاد عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم $dn_{\theta\varphi v}$ التى لها اتجاه معين $\theta\varphi$ ، وتكون سرعاتها محصورة بين $(v + dv , v)$:

اعتبر حجما معينا V من غاز تام تتوزع جزيئاته بانتظام فى كل الحيز .

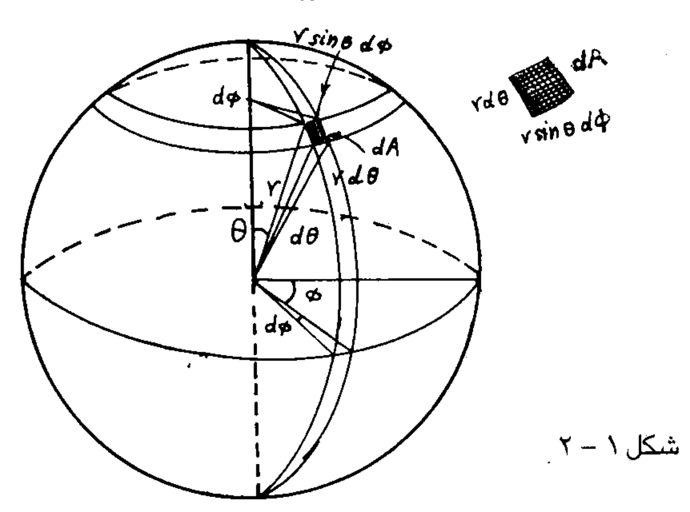
نفرض N هى العدد الكلى للجزيئات .

∴ عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم $n = N/V$

وبما أن توزيع الجزيئات منتظم فإن عدد الجزيئات فى الحجم dV هو $dN = ndV$ تتحرك الجزيئات حركة عشوائية أى إن اتجاهات السرع للجزيئات تكون فى الاتجاهات المختلفة بنفس درجة الاحتمال .

نفرض أن سرعة كل جزىء يمثلها متجه ، وأن جميع المتجهات قد نقلت لمركز إحداثيات مشترك . تقطع هذه المتجهات أو امتداداتها سطح كرة مركزها هو مركز الإحداثيات ، ويكون **توزيع نقط التقاطع منتظما على سطح الكرة** ، حيث إن توزيع السرعات واتجاهاتها فى الفراغ منتظم .

* متوسط عدد النقط لوحدة المساحات $= \dfrac{N}{4\pi r^2}$



شكل ١ – ٢

حيث r هو نصف قطر كرة المرجع (شكل ١ – ٢) . إذا كانت dA هى مساحة صغيرة فإن عدد النقط عليها هو :

$$dN = \frac{N}{4\pi r^2} \cdot dA$$

اعتبر الآن أى متجه فى الفراغ يمر بالمساحة dA ، ويتحدد اتجاهه على أساس محاور قطبية بالزاويتين (φ , θ) كما فى شكل ١ – ٢ .

وتكون على هذا الأساس المساحة dA مساوية :

$$dA = r \sin\theta \; d\varphi \; r \; d\theta = r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi$$

وتكون عدد النقط فى هذه المساحة هى :

$$dN_{\theta\varphi} = \frac{N}{4\pi r^2} r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi$$

$$= \frac{N}{4\pi} \sin\theta \; d\theta \; d\varphi$$

هذا العدد هو نفسه عدد الجزيئات التى لها سرعات مختلفة ، وتتحرك فى الاتجاه بين

$$(d\varphi + \varphi , \varphi) , (\theta + d\theta , \theta)$$

وبالقسمة على الحجم الكلى للغاز نحصل على عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم التى لها الاتجاه السابق وهي :

$$dn_{\theta,\varphi} = \frac{dN_{\theta,\varphi}}{V} = \frac{n}{4\pi} \sin\theta \; d\theta \; d\varphi$$

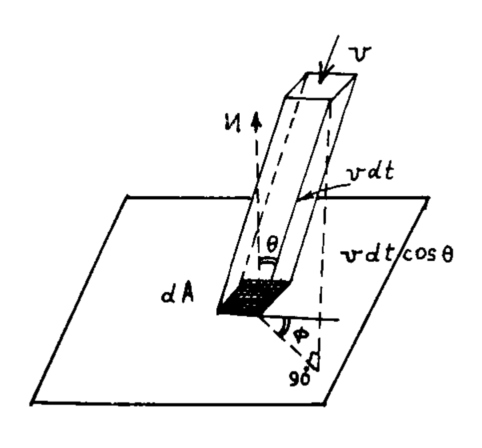
حيث $n = \frac{N}{V}$ هو عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم

* ويكون للجزيئات التى تتحرك فى الاتجاه θφ سرعات تتفاوت بين صفر وما لا نهاية .

أما إذا أردنا ان نعتبر فقط تلك الجزيئات التى تتحرك فى هذا الاتجاه ، ويكون لها سرعات بين (v + dv , v) يكون هذا العدد هو :

$$dn_{\theta\varphi v} = \frac{dn_v}{4\pi} \sin\theta \; d\theta \; d\varphi \qquad \text{.........} \; (1 - 1)$$

إيجاد العدد الكلى للتصادمات مع وحدة المساحة فى وحدة الزمن لجميع جزيئـــات الغاز :



شكل ١ – ٣

تصادم الجزيئات مع الجدران .

اعتبر مساحة صغير dA من جدران الإناء المحتوى للغاز شكل (١ – ٣) . واعتبر جزئياً يتحرك بسرعة ما بين v & $v + dv$ وفى الاتجاه بين :

$(\varphi , \varphi + d\varphi) , (\theta , \theta + d\theta)$

ولنسمى هذا الجزىء وأمثاله $v \varphi \theta$.

فى فترة زمنية dt يتحرك الجزىء مسافة vdt .

أنشىء اسطوانة (أو متوازى مستطيلات) مائلة فى الاتجاه $\theta\varphi$ ويكون طولها vdt ، واعتبر جميع الجزيئات بداخلها . تتفاوت سرعة هذه الجزيئات بين صفر ، ∞ .

عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم والتى تتحرك فى الاتجاه $\theta\varphi = dn_{\theta\varphi}$ من هذه الجزيئات يوجد عدد صغير $dn_{\theta\varphi}(v)$ يكون متحركا بسرعة واقعة بين v & $v + dv$. عدد هذه الجزيئات لوحدة الحجم من المعادلة رقم ١–١ يكون :

$$dn_{\theta\varphi v} = \frac{dn_v}{4\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

حجم الأسطوانة :

$$dV = dA \,.\, v\, dt \cos\theta$$

عدد الجزيئات من نوع v φ θ الموجودة بالاسطوانة هو :

$$n_{\theta\varphi v}\, dV = dA\, dt \,\frac{v\, dn_v}{4\pi}\, \sin\theta\, \cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

ويكون عدد الجزيئات من هذا النوع التى تصدم وحدة المساحة فى وحدة الزمن هى :
(بالقسمة على ($dA\, dt$)) :

$$\frac{1}{4\pi}\, v\, dn_v\, \sin\theta\, \cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

∴ وبإجراء التكامل على θ بين $\frac{\pi}{2}$ ،، وعلى φ بين 2π ،، نحصل على العدد الكلى للتصادمات مع وحدة المساحة فى وحدة الزمن وهذا يساوى :

$$\frac{1}{4}\, v\, d\, n_v$$

أى إن عدد التصادمات يتناسب مع السرعة v ، وكذلك مع عدد الجزيئات التي لها هذه السرعة .

ولإيجاد العدد الكلى للتصادمات مع وحدة المساحة فى وحدة الزمن بالنسبة لجميع الجزيئات للغاز ولكافة السرع نجرى التكامل لنحصل على :

$$\frac{1}{4}\int v\, dn_v \qquad \ldots\ (1\text{–}2)$$

وإذا أدخلنا فى الاعتبار **السرعة المتوسطة للجزيئات** ، يمكن وضع النتيجة السابقة على صورة أبسط .

لإيجاد السرعة المتوسطة لجزيئات غاز . نفرض أن هناك N_1 جزىء له سرعة v_1 & N_2 له سرعة v_2 وهكذا تكون السرعة المتوسطة هى :

$$\bar{v} = \frac{N_1 v_1 + N_2 v_2 + \ldots}{N_1 + N_2 + \ldots} = \frac{\Sigma_i N_i v_i}{\Sigma_i N_i} = \frac{\Sigma_i N_i v_i}{N}$$

وإذا قسمنا على حجم الغاز فإن :

$$\bar{v} = \frac{\Sigma\ n_i\ v_i}{n}$$

حيث n هو العدد فى وحدة الحجوم . .

أما إذا كان توزيع الجزيئات متصلاً

فإن علامة المجموع Σ تتحول إلى تكامل :

$$\bar{v} = \frac{\int v\ dn_v}{n}$$

أى إن $n\ \bar{v} = \int v\ dn_v$ وبذلك تصبح معادلة ١ - ٢

العدد الكلى للتصادمات مع وحدة المساحة في وحدة الزمن لجميع الجزيئات =

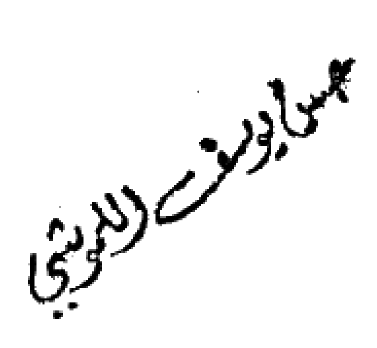
$$\frac{1}{4}\ n\ .\ v$$

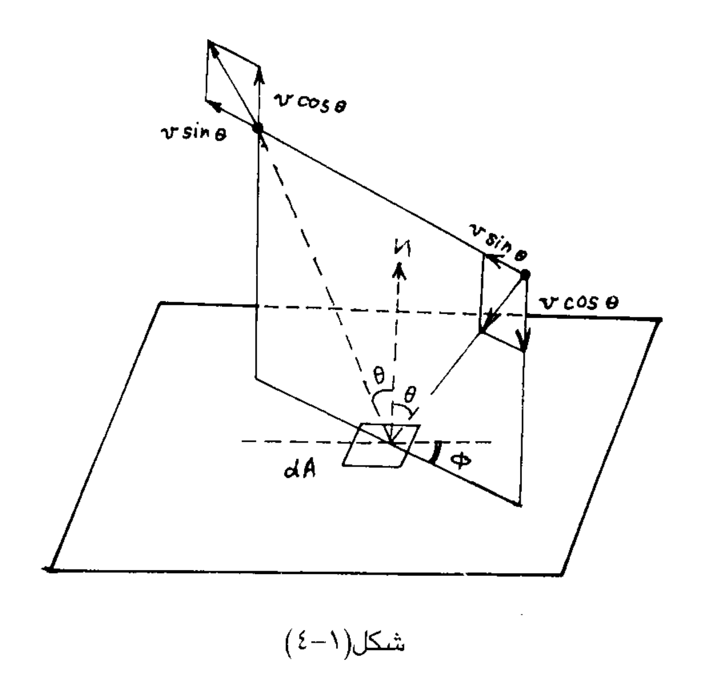
مثال : أوجد عدد مرات تصادم جزيئات الأكسجين على المتر المربع من الجدران فى الثانية ، إذا كانت كثافته ٣ × ١٠ ^٢٥^ جزىء لكل متر مكعب والسرعة المتوسطة للجزىء عند درجة ٢٧٣° مطلق هى ٤٥٠ متر / ثانية .

الحل : العدد =

$$\frac{1}{4}\ n\ \bar{v} = \frac{1}{4} \times 3 \times 10^{25} \times 450$$

$= 3.3 \times 10^{27}$ تصادما على المتر المربع فى الثانية .





شكل(١-٤)

دفع الجزيئات للجدران :

اعتبر جزيئا سرعته v يسقط على مساحة dA بزاوية θ على الاتجاه الرأسى شكل (١-٤) . يرتد الجزىء على السطح الأملس بنفس السرعة وتكون زاوية الارتداد هى نفس زاوية السقوط θ تتغير المركبة العمودية للسرعة بالتصادم من $v \cos \theta$ إلى $- v \cos \theta$.

إذا كانت كتلة الجزىء m يكون التغير العمودى فى كمية الحركة هو :

$$m v \cos \theta - (- mv \cos \theta) = 2m v \cos \theta$$

ولكن مما سبق وجدنا أن :

عدد التصادمات $\theta\varphi v$ مع مساحة dA فى الزمن dt هو

$$\frac{1}{4 \pi} v \, dn_v \sin \theta \cos \theta \, d \theta \, d \varphi \, . \, dA \, dt$$

التغير فى كمية الحركة بعد هذه التصادمات فى الزمن dt هو

$$2m\ v\ \cos\theta\ \frac{1}{4\pi}\ v\ dn_v \sin\ \theta \cos\theta\ d\theta\ d\varphi\ dA\ dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} m v^2\ dn_v\ \sin\ \theta\ \cos^2\ \theta\ d\ \theta\ d\ \varphi\ dA\ dt$$

نحصل على التغير الكلى فى كمية كالحركة لجميع التصادمات للسرعة v ، بإجراء

التكامل على θ من صفر إلى $\frac{\pi}{2}$ وعلى φ من صفر إلى 2π

التكامل الأول بالنسبة لـ $\theta = \frac{١}{٣}$

والتكامل الثانى بالنسبة لـ $\varphi = 2\pi$

∴ التغير الكلى فى كمية الحركة = $\frac{1}{3}\ m v^2\ dn_v\ dA\ dt$

هذا التغير يكون بالنسبة للسرعات الواقعة بين $v\ \&\ v + dv$ ، ويصبح التغير الكلى بالنسبة لجميع السرعات هو :

$$\frac{1}{3}\ m \left[\int v^2\, dn_v \right] dA\ dt$$

وباستخدام نظرية الدفع وكمية الحركة لنيوتن :

$$F = m a = m \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore F\, dt = m\, d\, v$$

أى أن الدفع يساوى التغير فى كمية الحركة . فإذا كانت القوة المؤثرة على المساحة dA هى dF فإن

$$dF.\ dt = \frac{1}{3}\ m \left[\int v^2\, dn_v \right] dA\ dt$$

ولكن من تعريف الضغط على السطح ، هو القوة على وحدة المساحات أى أن :

$$P = \frac{dF}{dA} = \frac{1}{3} \int v^2\ dn_v$$

متوسط مربع سرعة الجزيئات v^2

يمكن وضع المعادلة السابقة بصورة أبسط لو اعتبرنا متوسط مربع سرعة الجزيئات :

$$\overline{v}^2 = \frac{\Sigma N_i \; v_i^2}{\Sigma \; N_i} = \frac{\Sigma N v_i^2}{N}$$

$$\therefore \; \overline{v}^2 = \frac{\Sigma n_i \, . v_i^2}{n}$$

أما إذا كان للجزيئات توزيع متصل للسرعات فإن :

$$\overline{v}^2 = \frac{1}{n} \int v^2 \; dn_v$$

$$n \; \overline{v}^2 = \int v^2 \; dn_v$$

ضغط الغاز :

وباستخدام المعادلة السابقة مع معادلة ضغط الغاز نحصل على

$$P = \frac{1}{3} \; m \; n \; \overline{v}^2$$

يلاحظ أن متوسط مربع السرعة لا يساوى مربع متوسط السرعة

$$\overline{v^2} \neq (\overline{v})^2$$

المعادلة العامة للغازات :

باستخدام معادلة الضغط السابقة يمكن الحصول على العلاقة بين الحجم والضغط ودرجة الحرارة لغاز .

نفرض أن n هو عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم ، N هو العدد الكلى للجزيئات فى الحجم V :

$$\therefore \; n = \frac{N}{V}$$

ومن معادلة الضغط :

$$\therefore \; P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \overline{v}^2$$

$$PV = \frac{1}{3} N m \overline{v}^2$$

إذا اعتبرنا ١ كجم جزىء من غاز تكون N هى عدد أفوجادرو ويكون $M = Nm$ هو الوزن الجزيئى للغاز ويكون الطرف الأيمن من المعادلة عبارة عن $\left(\frac{2}{3}\right)$ طاقة حركة الجزيئات فى هذا الكيلو جرام الجزيئى .

المعادلة السابقة تشبه معادلة الحالة للغاز التام للكيلو جرام الجزيئى :

$$PV = RT = N k T$$

حيث R هو ثابت الغاز للكيلو جرام الجزيئى k ثابت بولتزمان ومن المعادلتين نجد أن :

$$\frac{2}{3} N . \frac{1}{2} m \overline{v}^2 = RT$$

$$\frac{1}{2} m \overline{v}^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N} T = \frac{3}{2} kT$$

أى أن **طاقة حركة الجزىء الواحد** تساوى $\frac{2}{3}$ حاصل ضرب ثابت بولتزمان فى درجة الحرارة المطلقة للغاز . وهذه المعادلة تعطى تعريف ثابت بولتزمان أو ثابت الغاز والمعنى الطبيعى له .

ثابت بولتزمان يساوى $\frac{2}{3}$ طاقة الحركة الانتقالية لجزىء واحد عند درجة الحرارة ١ كلفن .

∴ طاقة الحركة المتوسطة للجزىء تتناسب مع درجة الحرارة المطلقة ولا تتوقف على ضغط الغاز أو حجمه . أى أن طاقة حركة جزيئات الغازات المختلفة مثل الأيدروجين – الهيليوم – الأوكسجين وغيرها جميعها متساوية عند نفس درجة الحرارة بالرغم من اختلاف أوزانها الذرية .

١ -٤ درجات الحرية وقانون تساوى توزيع الطاقة :

أى جسم يتحرك فى خط مستقيم يكون له درجة واحدة من درجات الحرية ، أما إذا تحرك على مستوى يكون له درجتان حيث إنه يستطيع الحركة فى كل من الاتجاه س أو ص .

الجسم المتحرك فى الفراغ له ثلاث درجات حرية انتقالية . يمكن أيضا وجود درجات حرية دورانية أو درجات حرية تذبذبية .

عدد درجات الحرية لأى جسم متحرك تضاف إلى بعضها . فمثلا غاز به عدد N جزىء أحادى الذرة يكون له 3N عدد درجات حرية انتقالية .

من نظرية الحركة للغازات ، وجدنا أن طاقة الحركة الانتقالية لكل جزىء تساوى :

$$\frac{3}{2}\ kT$$

بما أن لدينا ثلاث درجات حرية انتقالية للجزىء تكون طاقة حركة الجزىء لكل درجة حرية تساوى 1/2 kT ويسمى هذا بقانون تساوى توزيع الطاقة على درجات الحرية المختلفة .

نص القانون :

فى أى مجموعة ديناميكية فى حالة اتزان حرارى تتوزع الطاقة بالتساوى على درجات الحرية المختلفة وتكون قيمة كل منها $\frac{1}{2}\ kT$.

للجوامد طاقة حركة للذرات المكونة لها وكذلك طاقة موضع ، لذلك فإن طاقة الذرة لكل درجة حرية هى $2 \times \frac{1}{2}\ kT = kT$.

مثال : احسب طاقة حركة وجذر متوسط مربع السرعة لجزيئات الأكسجين عند درجة ٢٧°م علما بأن الوزن الجزيئى له ٣٢ .

وأن عدد الجزيئات فى ١ كيلو جرام جزيئى = ٦,٠٣ × ١٠^٢٦

ثابت بولتزمان = ١,٣٨ × ١٠^-٢٣

الحل :

$$T = 273 + t = 300\ ^\circ K$$

$$\frac{3}{2}\ kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21}\ \text{Joule}$$

كتلة جزىء الأكسجين

$$m = \frac{32}{6.03 \times 10^{26}} = 5.31 \times 10^{-26}\ \text{Kgm}$$

متوسط مربع السرعة

$$\overline{v}^2 = \frac{2 \times 6.21 \times 10^{-21}}{5.31 \times 10^{-26}}$$

$$= 23.4 \times 10^{4}\ (m/s)^2$$

$$\text{r.m.s. } v = \sqrt{\overline{v}^2} = 482\ m/S$$

ملاحظة : سرعة الصوت فى الهواء تحت الظروف المعتادة N T P = ٣٥٠ متر / ثانية .

١ - ٥ استنتاج قوانين الغازات من معادلة الضغط :

١ - قانون بويل :

$$PV = \frac{1}{3}\ m\ n\ \overline{v}^2$$

عند ثبوت درجة الحرارة تكون طاقة حركة الجزيئات المتوسطة ثابتة ، أى إن $\overline{v}^2 = \text{Constant}$ وبذلك نحصل على قانون بويل $PV = \text{constant}$

٢ - قانون أفوجادرو :

اعتبر غازين عند نفس درجة الحرارة والضغط :

$$\therefore \ P = \frac{1}{3} m_1 \ n_1 \ \overline{v}_1^2 = \frac{1}{3} \ m_2 \ n_2 \ \overline{v}_2^2$$

وبما أن الغازين فى نفس درجة الحرارة :

$$\frac{1}{2} \ m_1 \ \overline{v}_1^2 = \frac{1}{2} \ m_2 \ v_2^2$$

ومن المعادلتين السابقتين نجد أن :

$$n_1 = n_2$$

أى إن أى غازين لهما نفس الضغط ودرجة الحرارة يكون لهما نفس العدد من الجزيئات لوحدة الحجوم .

٣ - قانون دالتون : اعتبر مجموعة من الغازات كثافاتها هى d_1 , d_2 , d_3 ، ومتوسط مربع سرعاتها .... , $\overline{v}_1^2 , \overline{v}_2^2 , \overline{v}_3^2$

إذا خلطت هذه الغازات فى حجم معين فإن محصلة الضغط P للمخلوط باعتبار جميع الأنواع من الجزيئات تكون :

$$P = \frac{1}{3} \ d_1 \ \overline{v}_1^2 + \frac{1}{3} \ d_2 \ \overline{v}_2^2 + \frac{1}{3} \ d_3 \ \overline{v}_3^2 + \ldots\ldots$$

$$= P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = \Sigma_i \ P_i$$

تعيين جذر متوسط مربع السرعة للجزئيات :

$$\acute{r} . m . s . v = \sqrt{\overline{v}^2}$$

باعتبار ١ كيلو جرام جزيئى يكون m N هو الوزن الجزيئى بالكيلو جرام للغاز . يمكن تعيين r . m . s . v´ جذر متوسط مربع السرعة لغاز بمعرفة ثابت الغذر له ودرجة حرارته أو بقياس ضغطه وحجمه .

$$PV = \frac{1}{3} m N \overline{v}^2 \qquad P = \frac{1}{3} \frac{m N}{V} v^2$$

$$\frac{Nm}{V} = \frac{\text{total mass of gas}}{\text{its volume}} = \frac{\text{كتلة الغاز}}{\text{حجمه}}$$

= كثافته d

$$\overline{v}^2 = \frac{3P}{d}$$

ويكون جذر متوسط مربع السرعة هو :

$$r.m.s.v = \sqrt{\overline{v}^2} = \sqrt{\frac{3P}{d}}$$

أيضا :

من المعادلة العامة للغازات $PV = RT = NkT$

ومن معادلة ضغط الغاز :

$$PV = RT = \frac{1}{3} N m v^2$$

حيث N هى عدد جزيئات الغاز فى الحجم V

$$\frac{1}{3} N m v^2 = N k T$$

$$\overline{v}^2 = \frac{3kT}{m}$$

$$r.m.s.v = \sqrt{\overline{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

تعريف : الإلكترون فولط (eV) :

عند معالجة الإلكترونات أو الأيونات بهذه الطريقة الإحصائية ، فإننا نستخدم الالكترون فولط كوحدة للطاقة . وتعريفها هو الطاقة التى يتحصل عليها الإلكترون عند سقوطه خلال فرق فى الجهد مقداره ١ فولط .

١ إلكترون فولط = ١,٦٠٢ × ١٠ $^{-١٩}$ جول

للمقارنة :

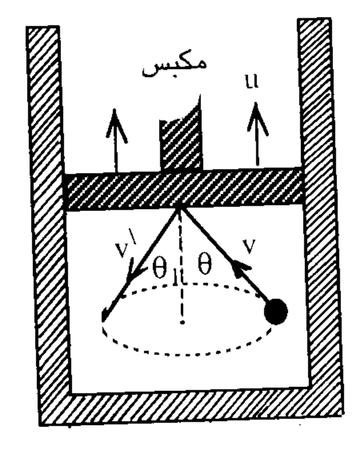
عند درجة حرارة ٣٠٠° مطلق تكون طاقة الجزىء $\frac{3}{2}\ k\,T$

$$= \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 \text{ Joule}$$

$$= \frac{6.21 \times 10^{-21}}{1.6021 \times 10^{-19}} = 0.04 \text{ ev}$$

وهذه القيمة هى طاقة حركة جزىء الغاز بالإلكترون فولط عند درجة ٢٧ ° م .

تطبيق : إثبات أن التغير الأدياباتيكى لغاز يخفض من درجة حرارته تصادم الجزيئات مع جدار متحرك . Adiabatic change



من المعروف أن التمدد الحر لغاز تحت ظروف ثابتة الحرارة (تغير ادياباتى) يسبب نقصا فى درجة حرارة الغاز أى نقصا فى طاقته الداخلية .

لإثبات ذلك على أساس الميكانيكا الإحصائية للغاز ، نعتبر غازاً داخل اسطوانة يقفلها مكبس حر الحركة ، شكل (١ - ٥) .

نفرض أن المكبس تحرك إلى أعلى بسرعة u أقل نسبياً من السرعة الجزيئية للغاز ، وأن الغاز يظل أثناء ذلك فى حالة اتزان ديناميكى حرارى .

نفرض جزىء يتحرك بسرعة v ويعمل زاوية θ مع العمودى على المكبس المتحرك .

المركبة العمودية للسرعة قبل التصادم = $v \cos \theta$

المركبة العمودية للسرعة بعد التصادم $v^1 \cos \theta^1$

حيث v^1 , θ^1 هما سرعة الجزىء والزاوية التى يصنعها مع العمودى بعد التصادم .

وهذه المركبة تساوى $v \cos \theta' - 2u$

التغير فى طاقة الحركة نتيجة التصادم =

$$1/2 \quad m (v \cos \theta)^2 - 1/2 \; m \left(v^1 \; \cos \; \theta^1\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \; m \; (v \cos \theta)^2 - \frac{1}{2} \; m \left(v \; \cos \; \theta \; - \; 2u\right)^2$$

تساوى تقريبا $2 \, m \, u \, v \cos \theta$

حيث إننا فرضنا أن v أكبر كثيرا من u وأهملنا الحد فى u^2 كما سبق أن أثبتنا أن : –

عدد الجزيئات التى تصدم وحدة المساحة فى وحدة الزمن للسرعة v

$$= \frac{1}{4\pi} \; v \; dn_v \; \sin \; \theta \; \cos \; \theta \, d\theta \; d\varphi$$

وبوضع $d \varphi = 2 \pi$ لتجميع تأثير كل الجزيئات يكون العدد السابق هو :

$$= \frac{1}{2} \; v \; dn_v \; \sin \; \theta \; \cos \; \theta \; d \, \theta \qquad \ldots . (2)$$

ويكون النقص الكلى فى طاقة الحركة عند التصادم لكل هذه الجزيئات

$$= \; m \; u \, v^2 \; dn_v \; \sin \; \theta \; \cos^2 \; \theta \; d \; \theta$$

وبإجراء التكامل على الزوايا θ بين صفر ، $\frac{\pi}{2}$ نوجد النقص الكلى فى طاقة جميع جزيئات الغاز ذات السرعة v عند تصادمها مع وحدة المساحة فى وحدة الزمن . وهذا يعطـى :

$$\frac{1}{3} \; m \; u \; v^2 \; dn_v$$

وأخيرا بالتكامل على جميع قيم السرعات v ما بين صفر ومالا نهاية نحصل علـى : (باعتبار جميع الجزيئات)

$$\frac{1}{3} \; n \; m \; v^2 \; . \; u \; = \; P \; . \, u$$

وإذا كانت مساحة المكبس A يكون النقص الكلى فى طاقة حركة الجزيئات يساوى =
$P \, A \, . \, u = F \, . \, u$

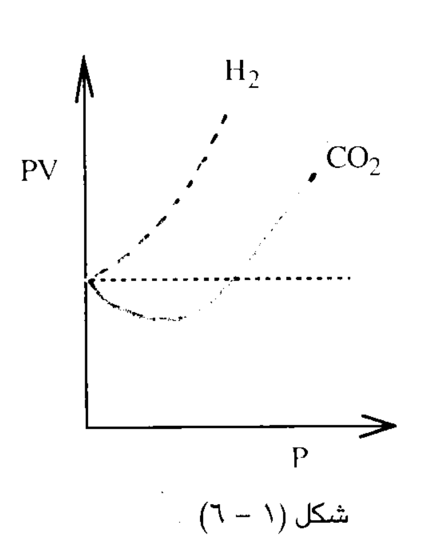
حاصل الضرب u . F هو معدل بذل الشغل على المكبس أثناء حركته . فإذا كانت المجموعة معزولة حراريا أى أن الجزيئات لا تستقبل حرارة من الخارج ، نجد أن طاقة حركة الجزيئات تنخفض وبالتالى تنخفض درجة حرارة الغاز .

سؤال : أثبت باستخدام الميكانيكا الإحصائية أن التمدد الدياباتى لغاز يسبب نقصا فى درجة حرارته .

١ - ٦ حيود الغازات الحقيقية عن تصرف الغاز التام :

من المعروف أن الغازات الحقيقية تحيد فى تصرفها عن الغاز التام ، فمثلا لا تتبع القانون العام للغازات $PV = RT$ خصوصا عند الضغوط الكبيرة نسبيا أو الصغيرة جدا .

فإذا رسمنا العلاقة بين P ؛ PV فإننا لا نجد خطا أفقيا مستقيما ، كما نتوقع بل نجد نقصا فى قيمة PV أولا يتبعه زيادة عندما يزداد الضغط كثيراً شكل (١-٦) . وقد أجرى رينو هذه الدراسة لغازات مختلفة وعند درجات حرارة مختلفة . ووجد أنه عند درجة حرارة معينة أسماها **درجة حرارة بويل** ، يساوى حاصل الضرب PV مقدار ثابتا .



شكل (١ - ٦)

تفسير الحيود :

لقد فرضت نظرية الحركة وجود غاز تام ليس لجزيئاته أى حجم ، كما لا يوجد بين هذه الجزيئات قوى جزيئية .

وهذا غير صحيح بالنسبة للغاز الحقيقى .

١ - عند درجات الحرارة المنخفضة يقل PV كلما زاد الضغط P ، وهذا معناه أن

الضغط اللازم لانقاص حجم الغاز بنسبة معينة أقل مما يجب حسب قانون بويل . وقد فسرت تلك الظاهرة على أساس وجود قوى جاذبة جزيئية بين الجزيئات تساعد الضغط الخارجى على أنقاص حجم الغاز .

٢ – أما عند الضغوط المرتفعة يزداد PV عن المعدل ، وذلك بسبب وجود حجم محدود للجزيئات . ويظهر تأثير حجم الجزيئات عند الضغوط العالية وعندما تقترب الجزيئات من بعضها قربا كافيا بحيث يكون حجم الجزيئات متناسبا مع حجم الفرا غ الذى تشغله هذه الجزيئات .

معادلة فان درفال للغازات الحقيقية

أدخل فان درفال فى اعتباره القوى الجزيئية بأن اعتبر أن أى جزىء داخل الغاز يقع تحت تأثير جذب جميع الجزيئات المحيطة به ، ولذلك تكون محصلة القوة المؤثرة عليه تساوى صفرا ، بينما ينجذب إلى الخلف الجزىء الذى يتصادم مع الجدران بسبب شد باقى الجزيئات وتكون القوى الجزيئية لذلك سببا فى انقاص ضغط الغاز عما يجب أن يكون عليه ،

وقد صحح فان درفال هذا النقص بأن أضاف إلى الضغط المقاس للغاز حدا يتناسب مع مربع كثافة الغاز أى مع مربع مقلوب الحجم . وبذلك يكون الضغط الصحيح للغاز هو :

$$\left(P + \frac{a}{v^2} \right)$$

أما بالنسبة لحجم الجزيئات فقد استبدل الحجم المقاس للغاز V بالمقدار (V - b) حيث b هو مقدار ثابت يرتبط مباشرة بحجم الجزيئات الفعلى فى الغاز ،

وتصبح معادلة الغاز الحقيقى هى :

$$\left(P + \frac{a}{v^2} \right) (V - b) = R T$$

إيجاد الثوابت b & a عمليا :

نوجد معدل زيادة الضغط مع درجة الحرارة عند ثبوت الحجم ، وذلك باستخدام الترمومتر الغازى ثابت الحجم ،

نحصل على $\left(\frac{\delta P}{\delta T}\right)_v$ وهو ميل منحنى التغير من P , T كما مبين بشكل (١-٧)

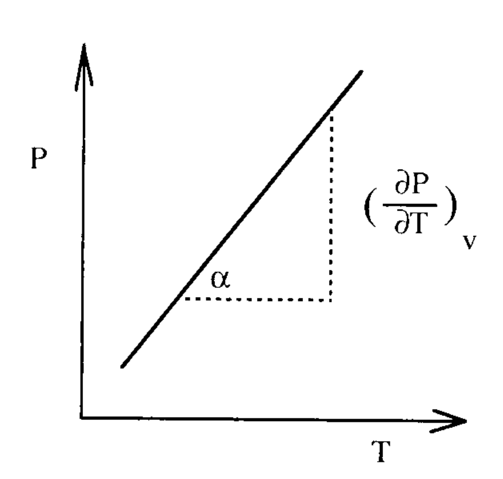
وبمفاضلة معادلة فان درفال جزئيا مع ثبوت الحجم نحصل على :

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right) = \frac{RT}{v - b}$$

$$\left(\frac{\delta P}{\delta T}\right)_v = \frac{R}{V - b}$$

ومنها

$$b = \left[V - \frac{R}{\left(\frac{\delta P}{\delta T}\right)_v}\right]$$



شكل (١ - ٧)

وبالتعويض في معادلة فان درفال نحصل على :

$$a = V^2 \left[T\left(\frac{\delta P}{\delta T}\right)_v - P\right]$$

تمرين (١) :

أوجد عدد جزيئات غاز فى معدل الضغط ودرجة الحرارة الموجودة فى حجم مكعب طول ضلعه يساوى طول الموجة المنظورة ٥٠٠٠ أنجستروم .

الحل :

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k T \qquad m v^2 = 3 kT$$

$$\frac{1}{3} m n v^2 = P = 76 \times 13.6 \times 980$$

$$\therefore n = \frac{3P}{m v^2} = \frac{3 \times 76 \times 13.6 \times 980}{3 \ kT}$$

$$\therefore N = n V$$

$$= \frac{3 \times 76 \times 13.6 \times 980}{3 \times 1.38 \times 10^{-16} \times 273} \times (5 \times 10^{-5})^8$$

$$= 4 \times 10^6 \text{ molecules}$$

تمرين (٢) :

أوجد درجة حرارة غاز تكون متوسط طاقة الحركة الانتقالية لجزىء فيه مساوية لطاقة أيون مفرد الشحنة singly charged ion له نفس كتلة الجزىء ، وتسارع accelerated من حالة سكون خلال فرق في الجهد قدره :

١ فولط ، ١٠٠٠ فولط ، $١٠^٦$ فولط (أهمل تأثير النسبية)

الحل : لجهد ١ فولط :

طاقة الأيون = $ev = 1 \times 10^{19} \times 1.6$ جول

$$ev = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT$$

$$1.6 \times 10^{-19} = \frac{3}{2} 1.38 \times 10^{-23} \times T$$

$$\therefore T = 7700^0 \ K$$

ولجهد $١٠^٣$ فولط $T = 7.7 \times 10^6 \ K$

ولجهد $١٠^٦$ فولط $T = 7.7 \times 10^9 \ K$

مسائل علي الباب الأول

مسائل وتمارين

١ – أوجد عدد جزيئات غاز فى معدل الضغط ودرجة الحرارة الموجودة فى حجم مكعب ، طول ضلعه يساوى طول الموجة المنظورة ٥٠٠٠ أنجستروم .

الحل :

$$1/2 \ m \ v^2 = 3/2 \ k T$$

$$\therefore \ m \ v^2 = 3 \ k \ T$$

من قانون الضغط :

$$1/3 \ m \ n \ v^2 = P$$

$$= 76 \times 13.6 \times 980$$

$$\therefore \ n = \frac{76 \times 13.6 \times 980 \times 3}{3 \ k \ T}$$

وهذا هو عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم من الغاز

عدد الجزيئات فى الحجم المطلوب V

$$N = n \ V$$

$$= \frac{76 \times 13.6 \times 980 \times (5 \times 10^{-5})}{3 \times 1.38 \times 10^{-16} \times 273}$$

$$= 4 \times 10^{6} \quad mol .$$

٢ – احسب عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم من من غاز عند درجة ٣٠٠° كلفن ، إذا كان ضغط الغاز ١٠ ^{٣} مم زئبق ثم أوجد عدد الجزيئات فى مكعب طول ضلعه ١ مم تحت نفس الظروف السابقة .

٣ – أوجد عدد مرات تصادم جزيئات الأكسجين على المتر المربع من الجدران فى

الثانية ، إذا كانت كثافته ٣ × ١٠ ^٢٥^ جزىء لكل متر مكعب والسرعة المتوسطة للجزىء عند درجة ٢٧٣° كلفن هى ٤٥٠ متر / ثانية .

٤ – عرف ثابت بولتزمان من الناحية الفيزيائية .

٥ – أثبت أن :

أ – طاقة حركة الجزئيات للغازات المختلفة عند نفس درجة الحرارة لا تتوقف على كتلها .

ب – جذر متوسط مربع السرعات للغاز يساوى $\sqrt{\frac{3KT}{m}}$

حيث T درجة الحرارة المطلقة m كتلة الجزىء .

٦ – احسب طاقة حركة وجذر متوسط مربع سرعة جزئيات الأكسجين عند درجة ٢٧° م ، علما بأن الوزن الجزيئى له ٣٢ .

٧ – أوجد متوسط مربع سرعة جزيئات غاز بدلالة ضغطه وكثافته .

٨ – أوجد درجة حرارة غاز تكون متوسط طاقة الحركة الانتقالية لجزىء فيه مساوية لطاقة أيون مفرد الشحنة له نفس كتلة الجزىء ، وتسارع من حالة السكون خلال فرق جهد قدره ١ فولط ، ١٠٠٠ فولط . أهمل تأثير النسبية .

الحل :

طاقة الأيون = $e\ v$

$= 1.6 \times 10^{-19} \times 1$

$e\ V = 1/2\ m\ v^2 = 3/2\ KT$

$$\therefore\ 1.6 \times 10^{-19} = 3/2 \times 1.38 \times 10^{-32}\ T$$

$$\therefore\ T = 7700^0\ K$$

ولجهد ١٠٠٠ فولط تكون الدرجة ٧,٧ مليون درجة .

٩ – أثبت أن متوسط مربع السرعات لا تساوى مربع متوسط السرعات للجزئيات الآتية :

العدد	٢	٤	٣
السرعة بالمتر/ثانية	١	٢	٣

الحل :

Ni	2	4	3
vi	1	2	3

$$\overline{v^2} = \frac{\Sigma\, Ni\ vi^2}{\Sigma\ Ni}$$

$$= \frac{2 \times 1^2 + 4 \times 2^2 + 3 \times 3^2}{2 + 4 + 3}$$

$$= 5\ (m/s)^2$$

$$\overline{v} = \frac{\Sigma\ Ni\ vi}{\Sigma\ Ni} = \frac{19}{9} = 2.11$$

$$\overline{(v)^2} = 4.45\ (m/S)^2$$

١٠ – أوجد متوسط طول المسار الحر للأيدروجين فى المعدلين ، علما بأن معامل اللزوجة بوحدات سم . جم . ث ٠,٠٠٠٠٨ وكثافة الأيدروجين فى المعدلين ٠,٠٠٠٠٩ جم / سم^3 . ثم أوجد تردد التصادم .

الحل :

$$N = 1/3 \quad m \quad n \quad \sqrt{v^2} \qquad \dots (١)$$

$$= 1/3 \quad d_{\lambda} \quad \sqrt{v^2} \qquad \dots (٢)$$

$$P = 1/3 \quad d \quad v^2$$

بحذف v^2 من المعادلتين :

$$\therefore \quad \lambda = N \sqrt{\frac{3}{Pd}}$$

وبالنسبة للأيدروجين نجد أن $\lambda = 1445 \times 10^{-5}$ cm

تردد التصادم هو متوسط عدد التصادمات للجزىء الواحد فى الثانية الواحدة ، وهذا يساوى متوسط السرعة مقسوما على متوسط طول المسار الحر ، أى أن

$$\therefore \quad \frac{v}{\lambda} = \frac{P}{\eta}$$

$$= \frac{76 \times 13.6 \times 980}{.00008}$$

$\therefore$ تردد التصادم = 1.251×10^{10} تصادما فى الثانية

١١ - أوجد نصف قطر جزىء الأيدروجين من بيانات المسألة السابقة

الحل :

$$\lambda \quad \frac{1}{\sqrt{2} \; n \, . \, 4\pi \, r^2}$$

حيث r نصف الجزىء

$$\therefore \; r^2 = \frac{1}{4\sqrt{2}\, \pi \; n \; \lambda}$$

ومن ذلك نحصل على :

$$r = 1.19 \times 10^{-8} \quad cm$$

١٢ - أوجد الفرق بين متوسط طول المسار الحر لجزئيات الهليليوم تحت ضغط جوى عند درجتى الحرارة صفر ، ١٠٠° م .

لزوجة الهيليوم عند الصفر = ٠,٠٠٠١٩ وعند ١٠٠° م = ٠,٠٠٠٢٣ بوحدات سم جم ث وكثافة الهليوم = ٠,٠٠٠١٧٨٥ جم / سم٣

١٣ - أثبت أن النسبة بين السرعة المتوسطة إلى السرعة الأكثر احتمالا إلى جذر متوسط مربع السرعة لجزيئات غاز هي على الترتيب ١,٥٩ : ١,٤١ : ١,٧٣ .

١٤ - يتمدد غاز تمدد أدياباتيا داخل اسطوانة يتحرك مكسبها ببطء ، وبسرعة u أقل نسبيا من السرعة المتوسطة لجزئيات الغاز أثبت أن طاقة الحركة المفقوده من الجزىء ذى السرعة v هى $2\ m\ v\ u\ \theta$ حيث θ هى زاوية سقوط الجزىء . ثم أثبت أن الطاقة الكلية المفقودة من جزئيات الغاز تساوى الشغل الذى يبذله الغاز عند التمدد .

١٥ - أثبت ما يأتى :

أ - احتمال التصادم بين جزيئات غاز يساوى مقلوب متوسط طول المسار الحر .

ب - يتناسب احتمال التصادم طرديا مع مساحة مقطع التصادم ومع عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم .

١٦ - أثبت أن عدد الجزيئات فى غاز والتي لها مسارات حرة أطول من $T\ cm$ تعطى بالمعادلة $N = N_0\ \exp\ -\ L/\lambda$

حيث λ هو متوسط طول المسار الحر للجزىء ، N_0 العدد الكلى للجزئيات .

١٧ - أثبت أن متوسط البعد الذى تأتى منه الجزيئات فى غاز لتعبر أى سطح داخله

تساوى $\frac{٢}{٣}$ متوسط طول المسار الحر للجزيئات ، ثم أوجد لزوجة الغاز .

١٨ – أثبت أن لزوجة أى غاز لا تتوقف على ضغطه أو كثافته .

١٩ – أثبت أن لزوجة الغاز تتناسب طرديا مع الجذر التربيعى لدرجة حرارته المطلقة ، ثم أوجد قطر الجزىء بدلالة لزوجة الغاز ودرجة حرارته المطلقة .

٢٠ – متوسط طول المسار الحر لجزيئات غاز عند درجة ٢٥°م هو ٢,٦٣ × ١٠$^{-٥}$ مترا . أوجد ضغط الغاز علما بأن نصف قطر الجزىء ٢,٥٦ × ١٠$^{-١٠}$ مترا ثم أوجد عدد التصادمات فى المتر من المسار لأحد الجزيئات .

٢١ – متوسط طول المسار الحر لجزيئات غاز ١٠ سم . إذا اعتبرنا ١٠^{٤} مسارات حرة . أوجد عدد الجزيئات التى لها مسارات أكبر من ١٠ سم وكذلك أكبر من ٥٠ سم .

٢٢ – فى المسألة السابقة كم عدد الجزئيات التى يكون لها طول مسارات محصور بين ٩,٥ ، ١٠,٥ سم ؟ وكم عددها بين ٩,٩ ، ١٠,١ سم ؟

٢٣ – يبين الجدول التالى تغير لزوجة غاز ثانى أكسيد الكربون مع درجة الحرارة .

$t\ ^0c$	-21	0	100	182	302
$\eta \times 10^6$	12.9	14	18.6	22.2	26.8

احسب متوسط النسبة $\eta / \sqrt{T}$ ثم أوجد قطر الجزىء ، علما بأن الوزن الجزيئى لثانى أكسيد الكربون ٤٤ كيلو جرام للمول .

٢٤ – أوجـد مـعـامـل لزوجـة الهـواء علمـاً بـأن كـثـافـتـه ١,٢٩٣ كـجم / م^٣ والسرعة المتوسطة $\overline{v}$ لجزيئاته ٤,٦ × ١٠^٢ م / ث ومتوسط طول المسار الحر ٦,٤ × ١٠^-٨ متر في المعدلين .

٢٥ – مـدفع إلكتـرونى يخرج إلكترونات إلى حيـز به غاز ضـغطه ١٠٠ نيـوتن / م^٢ ، وتجمع الإلكترونات المتبقية بعد التصـادم مع جزيئات الغاز بواسطة لوح مـعدنى على بعد ١٠ سم من المدفع حيث يقاس التيار .

فإذا كان التيار الإلكترونى المنبعث من المدفع ١٠٠ ميكرو أمبير ، وتيار لوح التجميع ٣٧ ميكرو أمبير :

أ – فأوجد متوسط طول المسار الحر للإلكترونات .

ب – وماذا يصبح تيار اللوح المعدنى إذا أنقصنا ضغط الغاز إلى ٥٠ نيوتن / م^٢ ؟

الحل :

– أ –

$$N = No \ e^{-X/\lambda}$$

$$\therefore \ 37 = 100 \ e^{-X/\lambda}$$

$$0.37 = e^{-X/\lambda} = e^{-1}$$

$$x = \lambda = 10 \ cm$$

– ب – بما أن درجة الحرارة لا تتغير

إذن لا تتغير طاقة الحركة $1/2 \ m v^2$

عند ضغط ١٠٠

$$P_1 = 1/3 \ m n_1 \ v^2$$

عند ضغط ٥٠

$$P_2 = 1/3 \ m \ n_2 \ v^2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{1}$$

لكن

$$\lambda = \frac{0.707}{\sigma n}$$

∴ عند الضغط المنخفض :

$$\lambda_2 = 2 \quad \lambda_1 = 20 \text{ cm}$$

$$N / N_0 = e^{-X/\lambda}$$

ومنها

$$I/I_0 = e^{-X/\lambda}$$

$$= e^{-10/20}$$

$$I = 100 \quad e^{-0.5}$$

$$= 60 \text{ mico ampere}$$

٢٦ – يبدأ أيون أكسجين مفرد حركة حرة في اتجاه عمودى على مجال كهربائى شدته ١٠[٤] فوط / متر في غاز ضغطه جوى ودرجة حرارته المطلقة ٣٠٠ كلفن .

أ – أوجد المسافة المقطوعة في اتجاه المجال في زمن متوسط مسار حر .

ب – ما نسبة متوسط المسار الحر إلى هذه المسافة ؟

جـ – ما السرعة المتوسطة في اتجاه المجال ؟

د – ما هي نسبة السرعة الحرارية Thermal velocity إلى هذه السرعة ؟

هـ – ما نسبة طاقة التهييج الحرارى إلى الطاقة المكتسبة من المجال أثناء متوسط مسار حر .

٢٧ – في التجربة الخاصة بتحقيق قانون ماكسويل لتوزيع السرعات كان قطر

الاسطوانة ٢٧ . ٠ مترا ، وعدد دوراتها فى الدقيقة ١٢٠٠٠ ، وكان المصدر عبارة عن فرن يحتوى مادة الزنك في درجة ٣٠٠°م .

أوجد بعد النقطة التى تسقط عليها جزيئات الزنك عندما تكون الاسطوانة ساكنه عن النقطة التى تسقط عندها الجزيئات ذات الطاقة

$$1/2 \ m \ v_x^2 = 2 \ KT$$

الوزن الذرى للزنك = ٣٧ . ٦٥

٢٨ – أوجد متوسط طول المسار الحر ، وتردد التصادم لجزيئات النتروجين عند درجة $20^\circ C$ وضغط ١ جو .

اعتبر قطر الجزىء 2×10^{-10} m

٢٩ – الطاقة الداخلية لغاز يحتوى n مول من CO_2 عند درجة 300 K تعطى بالمعادلة :

$$U = a \ n \ R \ T + b$$

حيث a , b ثوابت

أ – أوجد السعة الحرارية الجزيئية تحت حجم ثابت C_v .

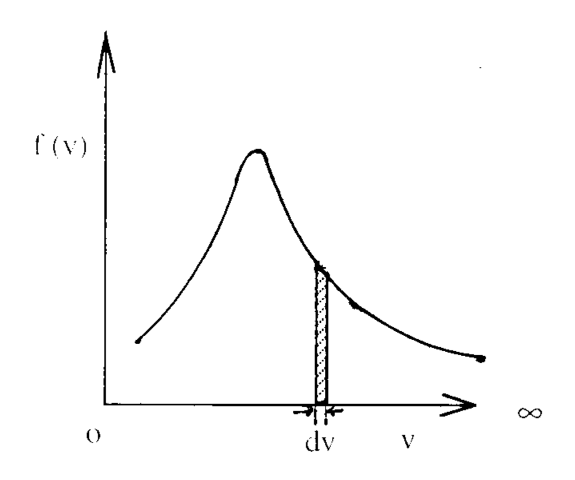
ب – ماذا تكون C_p لهذا الغاز ؟

جـ – كم عدد درجات الحرية لهذا الجزىء عند هذه الدرجة ؟

الباب الثانى

إحصاء ماكسويل - بولتزمان

٢ - ١ دالة التوزيع لماكسويل Maxwell's distribution function



شكل (٢ - ١)

اعتبر غازاً فى حالة اتزان ديناميكى حرارى ، أى أن درجة حرارته ثابتة . تتفاوت قيم سرعات الجزيئات بين صفر ومالانهاية ، ولكن معظمها يكون له سرعة متوسطة تعبر عن حالة الغاز .

قد تتغير سرعة أى جزئ نتيجة لتصادمه مع غيره أو مع الجدران ، ولكن يبقى ثابتا عدد الجزئيات التى لها سرع فى الحدود بين v & $v + dv$ ، ويظل هذا العدد لا يتغير مع الزمن ، انظرشكل (٢ - ١)

نفرض أن N_v هو عدد جزيئات الغاز الذى يكون لها سرعات قدرها v .

الدالة التى تربط عدد الجزيئات N_v بالسرعات v للغاز تسمى دالة توزيع السرعات لماكسويل $f(v)$.

ولإيجاد هذه الدالة رياضيا سنستعين بـــــ :

٢ - ٢ قانون ضغط الهواء الجوي مع الارتفاع عن سطح الأرض :

اعتبر اسطوانة رأسية من الهواء الجوى على شكل عمود مساحة مقطعه ١سم٢ ، شكل (٢ - ٢) .

تقع جزيئات الهواء فى هذا العمود تحت تأثير الجاذبية الأرضية . نفرض أن الهواء فى حالة اتزان حرارى ، وأن درجة حرارته ثابتة فى كل أجزائه .

شكل(٢-٢)

نعتبر نقطة على سطح الأرض أسفل العمود مركزا للإحداثيات ، ونعتبر شريحة أفقية من الهواء محصورة بين x , $x + dx$ ، إن ضغط الغاز على سطحيها هو . P , $P - dP$ على الترتيب . ويلاحظ هنا أنه كلما ارتفعنا أى زادت x كلما نقص ضغط الهواء .

وزن الغاز في الشريحة = $\rho\, g\, dx$

حيث ρ هى كثافة الغاز عند الارتفاع x

، g هى عجلة الجاذبية الأرضية .

يتزن وزن الشريحة مع الفرق فى الضغط على السطحين :

$$\therefore (P - dP) - P = \rho\, \delta\, d\, x$$

ولكن من قانون الغازات :

$$PV = RT = NkT$$

$$P = \frac{N}{V} kT = nkT$$

$$\therefore dP = kT\, dn$$

وأيضا

$$\rho = n \,.\, m$$

من المعادلات السابقة :

$$- dP = \rho \,.\, g \;\; dx$$

$$- k\, d\, n = n\, m\, g\, d\, x$$

$$\int_{n_0}^{n} \frac{dn}{n} = - \frac{mg}{kT} \int_{0}^{X} d\, x$$

وبالتكامل :

$$\therefore \quad n = n_0 \exp - \frac{mgx}{kT}$$

ومنها :

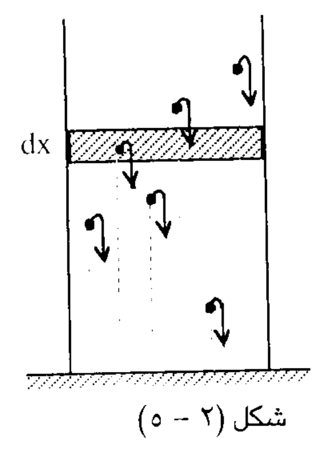
$$P = P_0 \exp - \frac{mgx}{kT}$$

يعرف هذا بقانون تغير الضغط بالارتفاع داخل عمود غاز ثابت الدرجة .

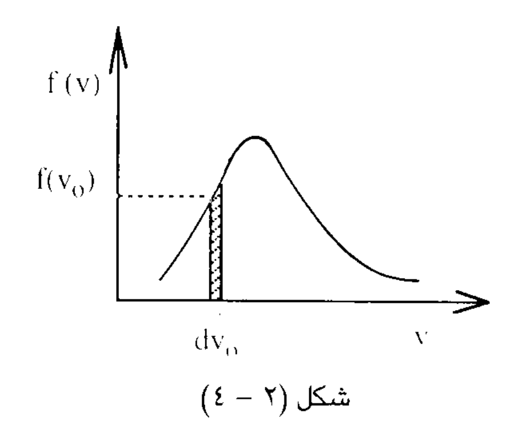
اعتبر الآن جزئ سرعته v_0 عند سطح الأرض $x = 0$ ويتحرك إلى أعلى ضد الجاذبية الأرضية . يصل هذا الجزئ إلى ارتفاع $x = v_0{}^2 / 2g$ عندما تتحول جميع طاقة الحركة للجزئ $\frac{1}{2} m v_0^2$ إلى طاقة موضع $m\, g\, x$

شكل(٢-٣)

تتفاوت سرعات الجزيئات الصاعدة من السطح بين صفر وما لا نهاية حيث إن ارتفاع عمود الهواء لا يحده حدا أعلى، نفرض أن عدد الجزيئات لوحدة الحجوم التى لها سرعات تقع بين $v_0 \,,\, v_0 + dv_0$ عند سطح الأرض هى : $n_0\, f\, (\, v_0\,)\, d\, v_0$



شكل (٢ - ٥)



شكل (٢ - ٤)

عدد الجزيئات المتجهة إلى أعلى شكل (٢ - ٥) والتى تستطيع بسرعتها أن تصل إلى الشريحة dx لتعبرها فى الثانية هى :

$$N_1 = \int_{v_0=\sqrt{2gx}}^{\infty} \quad = \quad n_0\, v_0\, f(v_0)\, dv_0$$

الحد الأدنى للتكامل $\sqrt{2gx}$ يمثل الجزيئات التى تكاد تكفى سرعاتها للوصول للشريحة على ارتفاع x . جميع الجزيئات التى لها سرعات أقل من ذلك ترتد إلى أسفل بفعل الجاذبية الأرضية ولا تصل إلى الارتفاع x .

عدد الجزيئات المتجهة إلى أسفل والتى تعبر الشريحة dx فى نفس الزمن هى

$$N_2 = \int_0^{\infty} n\, v\, f(v)\, dv$$

وبما أن الغاز داخل العمود فى حالة اتزان ديناميكى حرارى فإن عدد الجزيئات الصاعدة ، والتى تعبر dx يجب أن تساوى عدد الجزيئات الهابطة أى أن $N_1 = N_2$

وبالتعويض بدلا من n فى قانون تغير الضغوط بالارتفاع

$$n = n_0\, \exp - (mgx / kT)$$

نحصل على :

$$\int_{\sqrt{2gx}}^{\infty} v_0\, f(v_0)\, d\, v_0 = \exp - \frac{mgx}{kT} \int_0^{\infty} v\, f(v)\, d\, v \qquad (1)$$

لنجعل الآن المتغير واحدا فى هذه المعادلة باستخدام معادلة الحركة :

$$v_0^2 = v^2 + 2\,g\,x$$

وبالتفاضل :

$$v_0\,d\,v_0 = v\,d\,v$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) مع حذف v_0 نحصل على :

$$\int_0^\infty f\,(\,v^2 + 2\,g\,x\,)^{1/2}\,v\,dv = \exp - \left(\frac{mgx}{kT}\right)\int_0^\infty f\,(v)\,v\,dv \qquad \ldots.(2)$$

وبالتفاضل لطرفى المعادلة بالنسبة إلى v :

$$f\,(v^2 + 2gx)^{1/2} = \exp - \left(\frac{mg}{kT}\right) f\,(v) \qquad \ldots\ldots(3)$$

هذه معادلة دوالية functional equation وتحقق فقط إذا كانت الدالة $f\,(v)$ على الصورة :

$$f\,(v) = A \exp - m\,v^2 / 2\,kT$$

$$f\,(v) = A \exp - E / kT \qquad \ldots..(4)$$

حيث E يمثل متوسط طاقة الحركة $1/2\,m\,v^2$ للجزئ وتساوى

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_x^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{v}_y^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_y^2$$

A مقدار ثابت يمكن تحديد قيمته على أساس أن العدد الكلى للجزيئات فى وحدة الحجوم n يساوى العدد الكلى للنقط فى فراغ السرعات velocity space وهذا يعطى بالتكامل :

$$n = \int_0^\infty n\,(v)\,dv$$

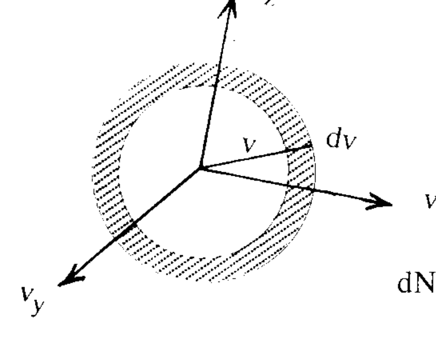
وقد وجد أن قيمة الثابت A هى :

$$A = n\left(\frac{m}{2\,\pi\,k\,T}\right)^{3/2}$$

تعرف المعادلة (٤) بدالة التوزيع لوحدة الحجوم لماكسويل ، وتعطى عدد جزيئات الغاز التي لها سرعة v فى وحدة الحجوم .

لإيجاد عدد الجزيئات التي لها سرعات تقع بين v & v + d v نعتبر قشرة كرية نصف قطرها v فى فرا غ السرعات ، ويكون سمكها dv تحتوي على الجزيئات المطلوبة شكل (٢ – ٦) .

حجم القشرة = $4 \pi v^2 \, dv$. باستخدام دالة التوزيع يكون العدد هو :



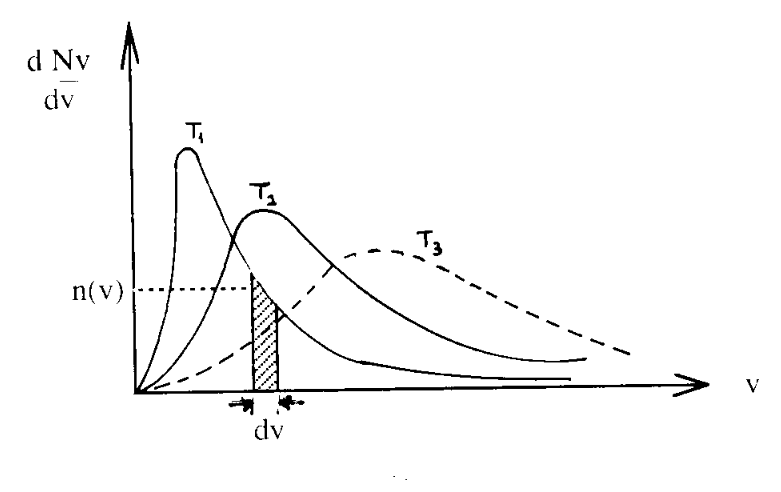
$$d N_v = 4 \pi v^2 \, dv \, A \exp \frac{-mv^2}{2kT}$$

$$dN_v = \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 \exp - \frac{mv^2}{2kT} \, dv$$

شكل(٢–٦)

$$\frac{dN_v}{dv} = n(v) = \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 \exp - \frac{mv^2}{2kT} \quad .. (5)$$

يتوقف عدد الجزيئات التى لها هذه السرعة v على درجة الحرارة . ويبين العلاقة بين dN_v / dv مع السرعة عند درجات حرارة مختلفة ، ومن المحتم أن تكون المساحات تحت هذه المنحنيات واحدة ، حيث إنها تمثل العدد الكلى لجزيئات الغاز .



شكل(٢–٧)

مسألة : أوجد السرعة المتوسطة وجذر متوسط مربع السرعات . r. m . s وكذلك السرعة الأكثر احتمالا لجزيئات غاز .

أولا : نحصل على السرعة المتوسطة $\bar{v}$ بضرب عدد الجزيئات لكل سرعة فى هذه السرعة ، ثم نجرى التكامل على جميع الجزيئات ونقسم على العدد الكلى للجزيئات .

$$\bar{v} = \frac{\int v \, d N_v}{N}$$

وباستعمال المعادلة (٥)

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \frac{4 n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e - m v^2 /2 kT$$

وبوضع

$$\lambda = \frac{m}{2 KT}$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \lambda^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\lambda h^2} dv$$

وهذا التكامل معروف القيمة من جداول التكاملات القياسية :

$$\int_0^\infty v^3 e^{-\lambda v^2} d v = \frac{1}{2 \lambda^2}$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \lambda^{3/2} \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

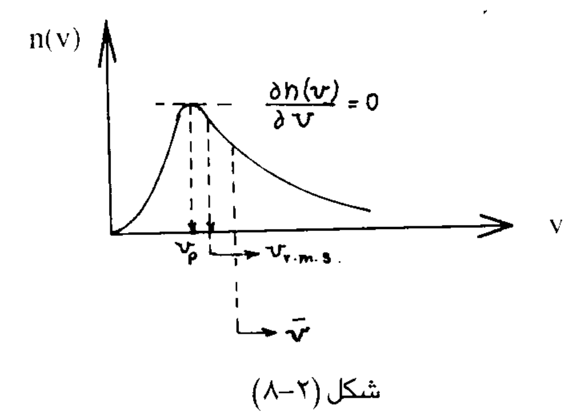
$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2 kT}{m}} = \sqrt{\frac{8 kT}{\pi m}}$$

ثانيا : $\bar{r}$. m . s

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

مما سبق :

$$r.m.s\ v = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$



شكل (٢-٨)

ثالثا : السرعة الأكثر احتمالا :

هي السرعة عند قمة منحنى التوزيع :

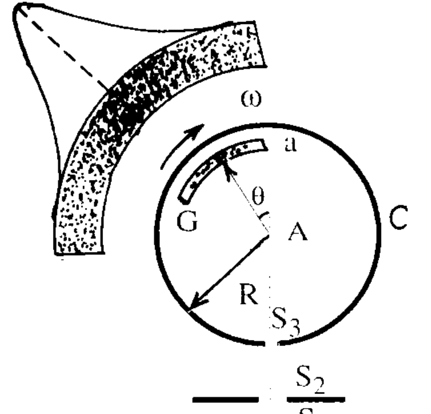
حيث $\frac{\partial nv}{\partial v} = 0$ وهذا الشرط يعطى

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

الحل : بمفاضلة المعادلة (٥) بالنسبة إلى v ثم مساواة الناتج بصفر

يتضح أن r. m. s. V تساوى $\sqrt{\frac{3\pi}{8}} = 1.086$ مرة السرعة المتوسطة $\bar{v}$.

تحقيق قانون ماكسويل عمليا :



شكل (٢-٩)

يتركب الجهاز شكل (٢ - ٩) من فرن o تخرج منه الجزيئات على شكل شعاع يحدده فتحتين مستطيلتين فى حائلين S_2 & S_1

C اسطوانة بها فتحة مستطيلة S_3 توازى محورها ويمكن إدارة هذه الاسطوانة حول المحور A بسرعة حوالى ٦٠٠٠ دوره فى الدقيقة .

عندما تكون الاسطوانة فى حالة سكون فإن شعاع الجزيئات يدخل الاسطوانة من خلال الفتحة S_3 ويسقط على لوح منحنى من الزجاج G .

يمكننا تعيين عدد الجزيئات التى تسقط على هذا اللوح الزجاجى فى أى جزء من أجزائه وذلك بقياس مقدار الاعتام الحادث على هذا الجزء باستخدام ميكروفوتومتر . وكلما ازداد عدد الجزيئات الساقطة علي الجزء كلما ازداد اعتمامه .

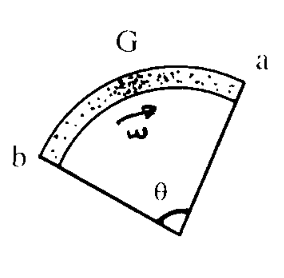
نفرض الآن أن الأسطوانة C تدور حول محورها . تدخل دفعة من الجزيئات داخل الاسطونة فقط خلال الفترة الزمنية القصيرة التى تعبر فيها الفتحه S_3 الشعاع الجزيئى أى عندما تكون موازية للفتحتين S_2 & S_1

إذا كان الدوران فى اتجاه عقرب الساعة يتحرك لوح الزجاج إلى اليمين أثناء عبور الجزيئات قطر الاسطوانة . وبذلك تصدم الجزيئات لوح الزجاج فى نقط على يسار نقطة تصادمها عندما تكون الاسطوانة ساكنة .

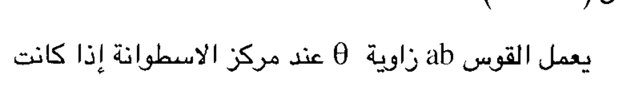
كلما كانت سرعة الجزيئات صغيرة كلما ازداد انحرافها إلى اليسار ، حيث إنها تحتاج لزمن أطول لعبور قطر الاسطوانة ، والتى تكون حينئذ قد دارت مسافة أكبر .

ويكون إعتام هذا اللوح مقياسا لطيف السرعات فى الشعاع الجزيئى . ولإيجاد سرع الجزيئات التى تصدم النقط المختلفة على اللوح G

نفرض ab هو مقدار الانحراف للجزئ ذى السرعة v، شكل (٢ - ١٠) .



شكل(٢-١٠)

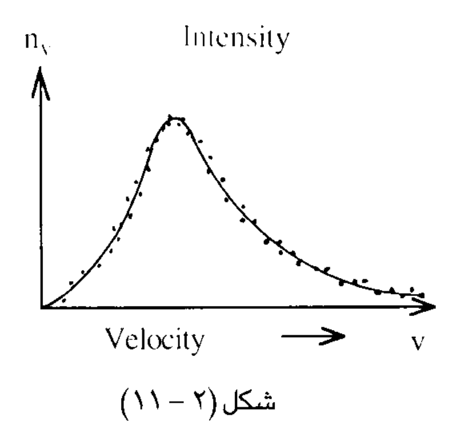


يعمل القوس ab زاوية θ عند مركز الاسطوانة إذا كانت السرعة الزاوية ω . يكون زمن دوران الاسطوانة زاوية θ هو :

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\theta}{2\pi} . T$$

يقطع الجزئ مسافة طولها القطر 2 R فى هذا الزمن فتكون سرعته هى :

$$v = \frac{2R}{t} = \frac{2R\omega}{\theta}$$



شكل (٢ – ١١)

وبدراسة تغير عدد الجزيئات كما يستدل عليه من درجة الإعتام مع سرعة الجزيئات في هذه الأماكن أمكن تحقيق قانون ماكسويل حيث تطابقت النقط التجريبية في المنحنى مع النقط النظرية ، شكل (٢ – ١١) .

الحرارة النوعية للغازات والسوائل على أساس إحصائي :

من قوانين الديناميكا الحرارية تكون الطاقة الداخلية V لمجموعة ما هي

$$U_2 - U_1 = Q - W$$

وتقاس التغيرات في الطاقة الداخلية عن طريق قياسات الحرارة والشغل . اعتبر مجموعة جزئيية .

طاقة المجموعة الداخلية تساوي مجموع طاقات جزيئاتها .

إذا كانت N هي عدد الجزيئات يصاحبها عدد f درجات حرية لكل جزئ تكون الطاقة الداخلية .

$$U^{\backslash} = N \cdot f \times \frac{1}{2} kT = \frac{f}{2} \; n\,RT$$

حيث n هنا هو عدد الأوزان الجزيئية في الغاز ، R هو ثابت الغاز للكيلو جرام الجزيئي R = N.k الطاقة الداخلية للوزن الجزيئي من الغاز

$$U = \quad = \frac{1}{2} f\,RT$$

الحرارة النوعية الجزيئية عند ثبوت الحجم هى :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

$$C_V = 1/2\ f R$$

ومن قوانين الديناميكا الحرارية : العلاقة بين C_V , C_P هى :

$$C_P = C_V + R$$

$$C_P = \frac{f}{2} R + R = \frac{f+2}{2} R$$

$$8 = \frac{C_P}{C_V} = \frac{1/2\ (f+2)}{1/2\ f} = \frac{f+2}{f}$$

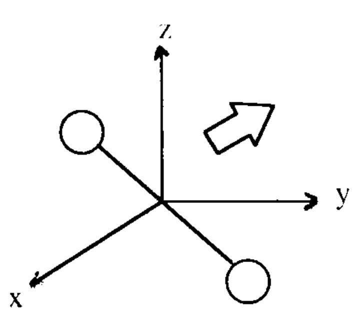
إذا اعتبرنا غاز طاقة حركة جزيئات كلها انتقالية فإننا نحصل على $f = 3$ وتكون :

$$C_V = \frac{f}{2} R = \frac{3}{2} R \ ;$$

$$\gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3}$$

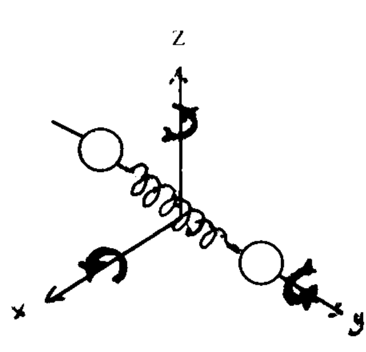
وهذه القيم صحيحة عمليا للغازات أحادية الذرة

اعتبر بعد ذلك غاز جزيئاته ثنائية الذرة ، شكل (٢ - ١٢) .



عزم القصور الذاتى للمجموعة حول المحورين (z, x) يكون كبيرا جدا بالنسبة للعزم حول محور (y , y) ولذلك يمكن اعتبار أن للجزئ درجتين فقط من درجات الحرية الدورانية حول المحورين (z,x) .

أيضا بما أن الرابطة بين الذرتين فى الجزىء ليست متماسكة ، لذلك يمكن للذرتين أن تتحركا حركة تذبذبية فى اتجاه الخط الواصل بينهما . وهذا يضيف عدد ٢ درجة من درجات الحرية .



شكل (٢-١٢)

∴ يكون العدد الكلى لدرجات حرية الجزىء :

٣ انتقالية + ٢ دورانية + ٢ تذبذبية = ٧

وتكون الحرارة النوعية :

$$C_V = \frac{7}{2} R \quad ; \qquad \gamma = \frac{9}{7} = 1.29$$

وهذه القيم أيضا تتفق مع القيم المقاسة للغازات ثنائية الذرة .

وكلما ازداد عدد الذرات فى جزىء الغاز تزداد عدد درجات الحرية ، ويؤدى ذلك إلى أن γ النسبة بين C_P , C_V تقل باستمرار كلما زادت f ، وهذا أيضا يتفق مع واقع التجربة .

الحرارة النوعية للجوامد :

تختلف الجوامد عن الغازات والسوائل، حيث إن لكل ذرة موضع اتزان معين وترتبط الذرات ببعضها بقوى كبيرة . لذلك تكون حركة الذرات تذبذبية حول مواضع الاتزان ، وتعتبر كل ذرة نقطة كتلة point mass ، ولذلك يكون لها ثلاث درجات حرية للحركة التذبذبية.

ولكن يوجد أيضا نتيجة لقوى الترابط طاقة موضع ويكون طاقة الذرة لكل درجة حرية $2 \times \frac{1}{2} kT$ أى kT

الطاقة الكلية لـ N جزىء فى ١ كيلو جرام جزىء هى :

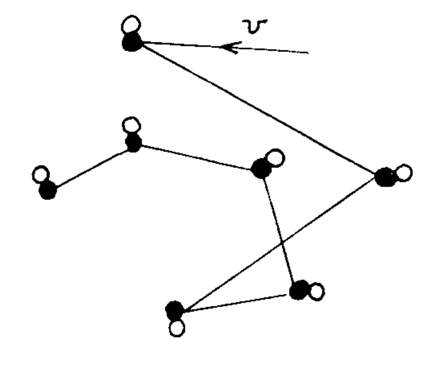
$$U = 3\,N \times kT = 3\,R\,T$$

وتكون الحرارة النوعية الذرية molar sp.ht. or atomic heat

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3\,R$$

ويعرف هذا بقانون ديولنج وبتى الذى ينص على أن الحرارة الذرية لجميع المواد الصلبة في الدرجات المرتفعة واحدة ، وتساوى 3 R

متوسط طول المسار الحر للجزيئات :

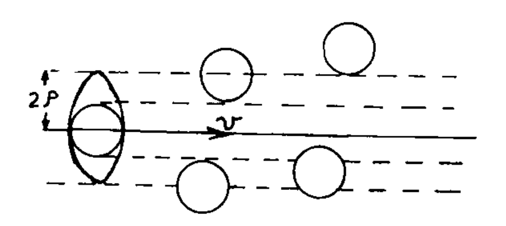


طول المسار الحر للجزىء هو المسافة التى يقطعها الجزىء بين تصادمين متتالين . ومن الواضح أن طول المسار الحر يختلف شكل (٢ - ١٣) ولكن يوجد للغاز متوسط لطول المسار الحر يرمز له بـ λ

شكل (٢-١٣)

لإيجاد λ نفرض أن جزيئات الغاز جميعا فى حالة سكون وأن جزيئا واحد فقط هو الذى يتحرك ويتصادم مع الجزيئات الأخرى .

نفرض أن سرعة هذا الجزىء هى v وأن نصف قطره ρ شكل (٢ - ١٤) . تكون 2ρ هى المسافة بين مركزى جزيئين عند تصادمهما .



جميع الجزيئات التى توجد مراكزها فى داخل أسطوانة مساحة مقطعها $\pi\,(2\rho)^2$ ويمر محورها بمركز الجزىء المتحرك لابد أن تتصادم معه .

شكل (٢-١٤)

تسمى المساحة $\sigma = 4\,\pi\,\rho^2$ بمقطع التصادم collision cross- section

فى الزمن t يقطع الجزىء المتحرك مسافة $v\,t$ ويكتسح حجم الاسطوانة ذات الطول $v\;t$ والمقطع σ

جميع الجزيئات فى الأسطوانة تتصادم مع الجزىء .

فإذا كان n هو عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم يكون عدد الجزيئات فى حجم الأسطوانة هو $\sigma\,v\,t\,.\,n$ ويمثل هذا عدد التصادمات z التى تحدث فى الزمن t ويطلق على ذلك تردد التصادم collision frequency عندما يكون الزمن t يساوى ثانية واحدة

$$z = \sigma\,n\,v$$

مثال : أوجد تردد التصادم للأكسجين ، علمنا بأن عدد الجزيئات فى المتر المكعب $= 3 \times 10^{25}$

سرعة الجزىء عند درجة الغرفة = 450

نصف قطر جزىء الأكسجين = 1.8×10^{-10} متر

الحل : collision cross section

$$\sigma = 4 \pi p^2 = 4 \pi \times (1.8 \times 10^{-10})^2$$
$$= 4 \times 10^{-19} \ m^2$$

$$\text{collision freq.} \quad z = 4 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^{25} \times 450$$
$$= 5.5 \times 19^{9} \quad \text{collision / sec.}$$

لإيجاد متوسط طول المسار الحر λ نقسم المسافة الكلية المقطوعة فى الزمن t على عدد التصادمات فى هذا الزمن :

$$\therefore \lambda = \frac{v\,t}{\sigma.\ n.\ v.t} = \frac{1}{\sigma\, n}$$

ولما كان عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم يتناسب طرديا مع ضغط الغاز فإن متوسط طول المسار الحر يتناسب عكسيا مع الضغط

$n \propto P$ $\qquad\qquad$ $\lambda \propto 1/P$

من المثال السابق λ للأكسجين

$$\lambda = \frac{1}{\sigma\, n} = \frac{1}{4 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^{25}} = 8 \times 10^{-8} \ m$$

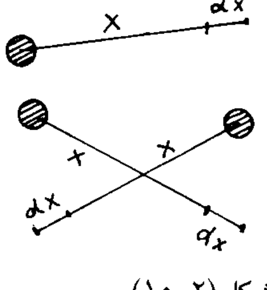
الاستنتاج السابق يفترض سكون الجزيئات فى الغاز وهذا غير صحيح وعند تصحيح المعادلة باعتبار الجزيئات متحركة حسب توزيع ماكسويلى للسرعات ، فإنه يمكن إثبات أن متوسط طول المسار الحر هو :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sigma n} = \frac{0.707}{\sigma n}$$

فى الظروف المعتادة يكون λ حوالى ١٠ أمثال المسافة البينية بين الجزيئات ، كما إن المسافة البينية تكون أيضا حوالى ١٠ أمثال قطر الجزىء

دالة توزيع المسارات الحرة :

اعتبر مجموعة مكونة من عدد N_0 جزىء فى لحظة ما ، يتصادم بعض منها فيخرج من المجموعة . ويتبقى عدد N جزىء بعد أن تكون قد قطعت مسافات x فى اتجاه مساراتها الحرة. أثناء المسافة الصغيرة التالية dx يتصادم بعض هذه الجزيئات N ويخرج من المجموعة ، شكل (٢ – ١٥) .



شكل (٢-١٥)

نفرض أن عدد هذه الجزيئات المتصادمة يتناسب مع العدد N وكذلك مع المسافة dx

التغير فى العدد dN الذى يخرج من المجموعة بالتصادم فى المسافة dx يكون سالبا ويساوى

$$dN = - P_c \, N \, dx \quad \ldots\ldots\ldots \ (2)$$

حيث P_c هو ثابت تناسب يسمى باحتمال التصادم Collision probability ويتوقف على حالة الغاز وليس على N أو x

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = - P_c \int_0^x dx$$

$$\therefore \quad N = N_0 \ \exp - P_c \ x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

أى أن عدد الجزيئات المتبقى دون أن يتصادم يقل حسب دالة أسية للمتغير x .

وبالتغويض فى المعادلة (١) نحصل على

$$\therefore \quad dN = - P_c \, N_0 . \exp (- P_c . x) \ \ dx \qquad (3)$$

وتمثل القيمة dN ، مأخوذة بإشارة موجبة طبعا ، عدد الجزيئات التى يكون لها

• مسارات حرة يقع طولها بين x & $x + dx$

وباستخدام الطرق الإحصائية لإيجاد متوسط طول المسار λ

نجد أن :

$$\lambda = \frac{\int x\, dN}{N_0} = \frac{\int_0^{\infty} P_c N_0\, x\, e^{-P_c x}\, dx}{N_0} = \frac{1}{P_c}$$

حيث أن :

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, dx = \int_{\infty}^{-\infty} -x\, de^{-x} = \int_{-\infty}^{\infty} y\, de^{y} = 1$$

وهذا يدل على أن احتمال التصادم P_c يساوى مقلوب متوسط المسار الحر λ

ولما كانت $\lambda = \dfrac{1}{\sigma n}$

فإن : $\therefore\ P_c = \sigma n$

أى أن احتمال التصادم يتناسب طرديا مع مقطع التصادم σ وعدد الجزيئات فى وحدة الحجوم .

وتكتب المعادلة (٢) بالشكل الآتى :

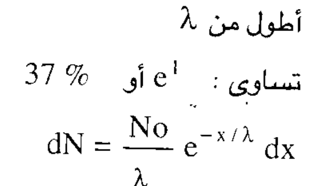
$$\therefore\ N = N_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \tag{4}$$

والمعادلة (٣) :

$$\therefore\ dN = -\frac{N_0}{\lambda} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \cdot dx \tag{5}$$

$$N = N_0 \, e^{-x/\lambda}$$

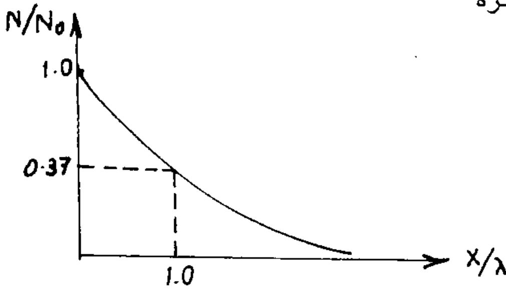
عدد الجزيئات التى لها مسارات حره

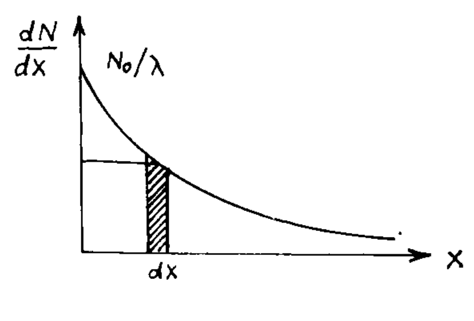


أطول من λ

تساوى : e^{1} أو $37\ \%$

$$dN = \frac{No}{\lambda} \, e^{-x/\lambda} \, dx$$





شكل (٢-١٦)

المعادلة (٤) تبين عدد الجزيئات التى لها مسارات حرة أطول من x

والمعادلة (٥) تبين عدد الجزيئات التى طول مسارتها الحرة تقع بين x & x + dx

ويراعى هنا إهمال الإشارة السالبة فى المعادلة إذ ليس لها معنى طبيعى .

مسائل وتمارين علي الباب الثاني

١- مدفع إلكترونى يزج إلكترونات إلى حيز به غاز ضغطه ١٠٠ نيوتن / م٢ ، وتجمع الإلكترونات المتبقية بعد التصادم مع جزيئات الغاز بواسطة لوح معدنى على بعد ١٠ سم من المدفع حيث يقاس التيار .

إذا كان التيار الالكترونى المنبعث من المدفع ١٠٠ ميكرو أمبير ، وتيار لوح التجميع ٣٧ ميكرو أمبير ، فأوجد متوسط المسار الحر للإلكترونات ، وماذا يكون تيار اللوح المعدنى إذا أنقص الضغط إلى ٥٠ نيوتن / م٢ .

الحل :

$$N = N_0 e^{-x/\lambda} \qquad \frac{N}{N_0} = \frac{37}{100} = e^{-x/\lambda}$$

$$e^{-1} = 0.37 \quad \because \frac{x}{\lambda} = 1 \qquad \therefore \ x = = 10 \text{ cm} .$$

درجة حرارة الغاز الإلكترونى ثابتة $\quad P = 1/3 \, mn v^2$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{100}{60} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \frac{n_2}{n_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad \therefore \lambda_2 = 2 \ , \ \lambda_1 = 20 \text{ cm}$$

$$N = N_0 e^{-x/\lambda} \qquad \therefore \quad I = I_0 e^{-x/\lambda}$$

$$I = 100 e^{-10/20} = 100 e^{-0.5}$$

$$= 60 \text{ micro amp} .$$

٢ - أوجد متوسط طول المسار الحر وتردد النظام لجزيئات النتروجين عند درجة ٢٠ °م وضغط ١ جو . اعتبر قطر الجزىء 2×10^{-10} m

٣ – الطاقة الداخلية لغاز يحتوى n مول من CO_2 عند درجة 300 K تعطى بالمعادلة

$U = a\,n\,RT + b$ حيث a,b ثوابت

أ – أوجد السعة الحرارية الجزيئية تحت حجم ثابت C_v .

ب – ماذا تكون C_p لهذا الغاز ؟

جـ – كم عدد درجات الحرية لهذا الجزىء عند هذه الدرجة ؟

٤ – إناء يحتوى ١ مول من غاز الهليوم عند درجة 300 k .أوجد عدد الجزيئات التى لها سرعات فى المنطقة بين 400 & 410 m / s .

٥ – أثبت أن متوسط طول المسار الحر لجزىء من غاز تام يعطى بالمعادلة :

$$l = kT / \sqrt{2}\, \pi d^2 P$$

حيث d هو قطر الجزىء ، P ضغط الغاز ، T درجة حرارته .

٦ – يحتوى إناء على 10^4 جزىء من الأكسجين عند درجة 500 K .

ارسم منحنى توزيع ماكسويل للسرعات مع اعتبار مناطق السرعات 100 m / s . ثم أوجد من المنحنى السرعة الأكبر احتمالا وكذلك متوسط السرعة وجذر متوسط مربع السرعات ، وبين ذلك على المنحنى . ثم أوجد عدد الجزيئات التى تقع سرعتها بين 300 & 600 m / s

٧ – أوجد النسبة بين عدد ذرات الأيدروجين فى الحالة المستقرة ground state وعدد الذرات المثارة للغاز عندما تكون درجة حرارته 3000 K .

فكرة الحل :

أوجد أولا طاقة الحالة المستقرة لذرة الأيدروجين ، ثم أوجد طاقة الذره المثارة بحساب طاقم التهيج الحرارى kT عند درجة ٣٠٠٠ كلفن، ثم استخدم دالة ماكسويل للتوزيع .

٨ – يبدأ أيون أكسجين مفرد حركة حرة فى اتجاه عمودى على مجال كهربائى شدته 10^4 volt / m . فى غاز ضغطه جوى ودرجة حرارته 300 K .

أ – أوجد المسافة المقطوعة فى اتجاه المجال فى زمن متوسط مسار حر .

ب – مانسبة متوسط المسار الحر إلى هذه المسافة ؟

جـ – ما السرعة المتوسطة فى اتجاه المجال ؟

د – ما نسبة السرعة الحرارية thermal velocity إلى هذه السرعة ؟

هـ – ما نسبة طاقة التهيج الحرارى إلى الطاقة المكتسبة من المجال أثناء متوسط مسارحر؟

٩ – فى التجربة الخاصة بتحقيق قانون ماكسويل لتوزيع السرعات كان قطر الاسطوانة 0.27 m وعدد دوراتها فى الدقيقة 12000 / min ، وكان المصدر عبارة عن فرن يحتوى ماده الزنك فى درجة 300 °C .

أوجد بعد النقطة التى تسقط عليها الجزيئات عندما تكون الاسطوانة ساكنة عن النقطة التى تسقط عندها الجزيئات ذات الطاقة $\frac{1}{2} m v_x^2 = 2 KT$. (الوزن الذرى للزنك = 65.37) .

١٠ – أثبت أن احتمال التصادم بين جزيئات غاز يساوى مقلوب متوسط طول المسارالحر . وإن احتمال التصادم يتناسب طرديا مع مساحة مقطع التصادم ، ومع عدد جزيئات الغاز فى وحدة الحجوم .

١١ – أثبت أن عدد الجزيئات فى غاز والتى لها مسارات حرة أطول من L cm تعطى بالمعادلة $N = N_o e^{-L/\lambda}$

حيث λ متوسط طول المسار الحر للجزىء ، N_O العدد الكلى للجزيئات .

١٢ - أثبت أن العدد الكلى للجزيئات التى تعبر وحدة المساحات فى وحدة الزمن داخل غاز تساوى $\frac{1}{4} n \bar{v}$ حيث n هو عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم ، $\bar{v}$ متوسط سرعة الجزىء.



الباب الثالث
ظواهر الانتقال

الظواهر الطبيعية التي تتوقف علي الانتقال Transport Phenomena

إذا لم يكن الغاز فى حالة استقرار ديناميكى حرارى يمكن حدوث أحد الظواهر الاتية :

١ - إذا كان تدفق السرعات مختلفا فى الأجزاء المختلفة من الغاز كأن يكون هناك حركة نسبية بين طبقات الغاز المختلفة تظهر خاصة اللزوجة Transfer of momentum .

٢ - عندما تكون درجة حرارة الغاز فى أجزائه المختلفة ، كأن يكون هناك ميل حرارى داخل الغاز يظهر التوصيل الحرارى ، حيث تنتقل الحرارة من الأجزاء الساخنة للباردة transfer of energy .

٣ - إذا كان تركيز جزيئات الغاز مختلفا فى أجزائه المختلفة تظهر ظاهرة الانتشار ، حيث تنتقل الجزيئات من مناطق التركيز الأكبر إلى الأقل transfer of matter .

∴ اللزوجة والتوصيل الحرارى والانتشار تمثل على الترتيب انتقال كمية الحركة ، والطاقة الحرارية ، والكتلة .

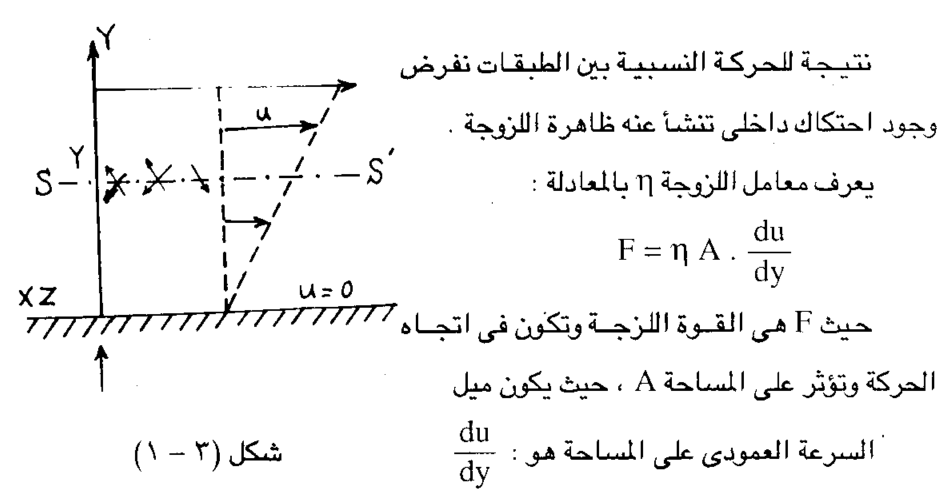
وتستحث جميع هذه الظواهر الطبيعية عن طريق التهيج الحرارى لجزئيات الغاز Thermal agitation .

ظاهرة اللزوجة :

اعتبر حالة غاز أو سائل يتحرك على مستوى أفقى X Z ، شكل (٣ - ١) تتحرك كتلة الغاز موازية للمستوى الأفقى وليست عمودية عليه .

باعتبار الغاز أو السائل مكون من طبقات فوق بعض . تزداد سرعة هذه الطبقات كلما ارتفعنا عن المستوى XZ أى فى الاتجاه الموجب لـ Y .

نتيجة للحركة النسبية بين الطبقات نفرض وجود احتكاك داخلى تنشأ عنه ظاهرة اللزوجة .



يعرف معامل اللزوجة η بالمعادلة :

$$F = \eta A . \frac{du}{dy}$$

حيث F هى القوة اللزجة وتكون فى اتجاه الحركة وتؤثر على المساحة A ، حيث يكون ميل السرعة العمودى على المساحة هو : $\frac{du}{dy}$

شكل (٣ - ١)

اعتبر الطبقة 'SS على ارتفاع Y من المستوى الثابت شكل (٣ - ١) وتتحرك بسرعة تدفق u لا تتعارض مع الحركة العشوائية للجزيئات في جميع الاتجاهات نتيجة للتهيج الحرارى . الغاز هنا ليس فى حالة اتزان ديناميكى حرارى . ولكن بما أن السرعة الجزيئية أكبر بكثير من سرعة التدفق ، لذلك يمكننا استخدام القوانين التى سبق استنتاجها بفرض وجود الاتزان .

تعبر الجزيئات الطبقة 'SS من أعلى لأسفل وبالعكس . ولكل جزىء سرعة تدفق لليمين تتوقف قيمتها على الارتفاع .

بما أن الحركة على مستوى أفقى .

∴ لا توجد حركة رأسية أى أن عدد الجزيئات التى تعبر الطبقة SS إلى أعلى تساوى حتما عدد الجزيئات التى تعبرها إلى أسفل .

ولكن سرعات الجزيئات الآتية من الطبقات العليا أكبر من تلك الآتية من أسفل ولذلك تنتقل كمية حركة للجزيئات من أعلى إلى أسفل ، أكبر من تلك التى تنتقل من أسفل إلى أعلى . ويؤدى هذا إلى انتقال مستمر لكمية حركة الجزيئات عبر السطح transfer of momentum .

وباستخدام قانون نيوتن يكون معدل نقل كمية الحركة خلال وحدة المساحات مساويا للقوة اللزجة عليها .

∴ اللزوجة كظاهرة ميكروسكوبية تنشأ عن نقل الجزيئات لكمية الحركة عبر الطبقات أثناء حركتها العشوائية .

إيجاد عدد الجزيئات الذى يعبر ١ سم^٢ فى الثانية :

نفرض مساحة صغيرة dA على الطبقة SS' ، شكل (٣-٢) نفرض حجما صغيرا dV يبعد مسافة r عن المساحة ويعمل زاوية θ مع العمودى . z = تردد التصادم & n = عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم .

شكل (٣-٢)

عدد الجزيئات فى الحجم dV = n dV

عدد التصادمات التى تتم داخل dV فى الزمن dt هو 1/2 z n dV dt « المعامل 1/2 وضع حيث إن كل تصادم يحتاج لجزيئين » .

عقب كل تصادم ينتج عدد ٢ مسار حر جديد

∴ عدد المسارات الحرة التى تنتج من داخل الحجم dV فى الزمن dt

$= z\, n\, dV\, dt$

هذه المسارات تتوزع عشوائيا فى الفراغ فى جميع الاتجاهات

$$\text{العدد المتجه للمساحة } dA = \frac{d\omega}{4\pi}\, z\, n\, dV\, dt$$

حيث dω هى الزاوية المجسمة التى يعملها الحجم dV عند المساحة dA وتساوى $dA \cos\theta / r^2$

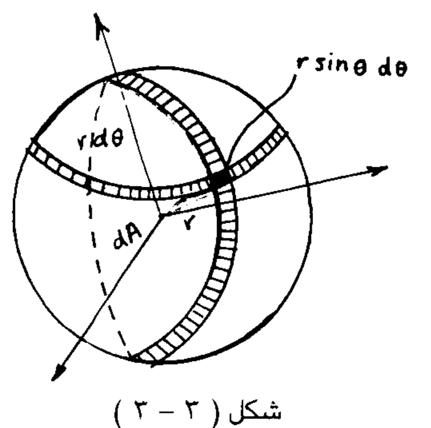
عدد الجزيئات التى تستطيع الوصول للمساحة dA دون تصادم يساوى العدد السابق مضروبا فى $\exp(-r/\lambda)$

وباستبدال قيمة الحجم الصغير dV بما يساويه باعتبار إحداثيات كرية spherical

coordinates نحصل على (انظر شكل (٣-٣))

$$dV = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

عدد الجزيئات التى تغادر الحجم dV ويصل للمساحة dA فى الزمن dt بدون أن تعانى أى تصادم هو :



شكل (٣ - ٣)

$$\frac{1}{4\pi} z \, n \, dA \, dt \sin\theta \cos\theta \, e^{-r/\lambda} \, d\theta \, . d\phi \, . \, dr$$

نحصل على العدد الكلى للجزيئات التى تعبر المساحة dA فى الزمن dt وبإجراء التكامل على θ من $\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$ وعلى f من $2\pi \longrightarrow 0$

وعلى r من $\infty \longrightarrow 0$ نحصل على :

$$\frac{1}{4} z \, n \, \lambda \, dA \quad dt$$

وبمعرفة أن تردد التصادم $z = v / \lambda$ يكون :

عدد الجزيئات الذى يعبر 'SS من أى ناحية لوحدة المساحات فى وحدة الزمن يساوى

$$\frac{1}{4} n \, v$$

ويلاحظ أن هذه هي نفس النتيجة التى سبق أن حصلنا عليها مع إهمال تأثير التصادم للجزيئات .

إيجاد متوسط الارتفاع الذى تأتى منه الجزيئات لتعبر المساحة dA :

الحجم dV يرتفع عن المستوى 'SS مسافة $r \cos\theta$ وباستخدام الطرق الإحصائية نحصل على متوسط الارتفاع عن 'SS لجميع الجزيئات التى تعبر المساحة dA وذلك بإيجاد حاصل حاصل ضرب الارتفاع $r \cos\theta$ فى عدد الجزيئات الآتية من الحجم

dV والتى تعبر dA ، ثم إجزاء التكامل على $r\ \theta\ \phi$ ثم بالقسمة على العدد الكلى للجزيئات الذى يعبر dA وهذه تساوى :

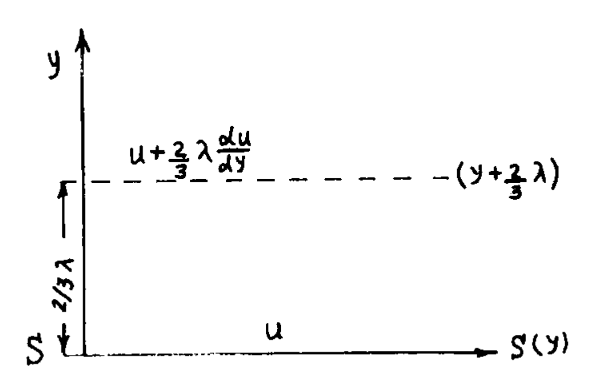
$$\bar{y} = \frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi} zn\ dA\ dt\ \sin\theta\ \cos^2\theta\ d\theta\ d\phi\ r\ e^{-r/\lambda}\ dr}{1/4\ z\ n\ \lambda\ dA\ dt}$$

$$\therefore\ \bar{y} = \frac{4\ z\ n\ \lambda^2\ dA\ dt}{6\ z\ n\ \lambda\ dA\ dt} = 2/3\ \lambda$$

أى أن ، فى المتوسط ، يكون كل جزىء يعبر المساحة من أعلى (أو من أسفل) أتيا

من ارتفاع (أو من انخفاض) يساوى $\frac{٢}{٣}$ متوسط طول المسار الحر للجزىء .

إيجاد معامل لزوجة الغاز :



شكل(٣-٤)

نفرض أن سرعة تدفق الغاز على السطح S S' على الارتفاع y تساوى u تكون السرعة على ارتفاع $y + \frac{2}{3}\lambda$ هى $u + \frac{2}{3}\lambda\frac{du}{dy}$

تنتقل كمية الحركة للجزيئات فى الاتجاه الأفقى وليس الرأسى ، كمية حركة الجزىء على الارتفاع $y + \frac{2}{3} \lambda$ هى :

$$m \left(u + \frac{2}{3} \lambda \frac{du}{dy} \right)$$

كمية حركة الجزيئات فى اتجاه التدفق والتى تنتقل عبر وحدة المساحة فى وحدة الزمن من أعلى لأسفل هى :

$$\frac{1}{4} n \bar{v} m \left(u + \frac{2}{3} \lambda \frac{du}{dy} \right)$$

وبالمثل كمية حركة الجزيئات التى تنقلها الجزيئات العابرة من أسفل إلى أعلى تساوى :

$$\frac{1}{4} n \bar{v} . m \left(u + \frac{2}{3} \lambda \frac{du}{dy} \right)$$

يكون بذلك معدل انتقال كمية الحركة خلال وحدة المساحات فى وحدة الزمن هو الفرق بين الكميتين السابقتين أى :

$$\frac{1}{3} n m \bar{v} \lambda \frac{du}{dy}$$

ومن قانون نيوتن الثانى تساوى القيمة السابقة القوة اللزجة viscous force لوحدة المساحات ، وهذه تساوى بالتالى :

$$\eta . \frac{du}{dy}$$

ومن هذا نحصل علي قيمة معامل اللزوجة η .

$$\eta = 1/3 \; n \; m \; v \; . \; \lambda \; . .$$

وبالتعويض بدلا من $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \; \sigma \; n}$ حيث σ = مساحة مقطع التصادم نحصل على :

$$\eta = \frac{m \bar{v}}{3 \sqrt{2} \; \sigma}$$

هذه المعادلة لا تحتوى على الضغط أو كثافة الغاز ، ولذلك فلزوجة الغاز لا تعتمد عليهما وإن كانت تعتمد على درجة الحرارة خلال :

$$\sqrt{\frac{8\,K\,T}{\pi\, m}} = \bar{v}$$

وهذا يعطى : $n \;\&\; T$

وتستخدم معادلة اللزوجة :

$$\eta = \frac{m}{\sqrt[3]{2\,\sigma}} \sqrt{\frac{8\,k\,T}{\pi\, m}}$$

كطريقة مباشرة لإيجاد مقطع التصادم أو قطر الجزىء ، حيث إن η ، T تقاس مباشرة

$$\therefore \quad \sigma = \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{4\;m\;k\,T}{9\,\pi}} = \pi \quad D^2$$

حيث D هو قطر الجزىء .

إيجاد معامل التوصيل الحرارى لغاز :

اعتبر لوحين معدنيين بينهما الغاز. إذا كان اللوح العلوى فى درجة حرارة مرتفعة بالنسبة للسفلى تنتقل طاقة الحركة للجزيئات من أعلى لأسفل وينتج عن ذلك ظاهرة التوصيل الحرارى (شكل ٣ - ٥)

توجد بين اللوحين طبقات من الغاز ثابتة الدرجة توازى مستوى اللوحين

شكل (٣-٥)

نفرض أن :

T هى درجة حرارة الطبقة SS' وأن الميل الحرارى هو dT / dy

حيث y هو ارتفاع الطبقة عن المستوى البارد .

متوسط طاقة الجزىء عند الدرجة (T K) يساوى 1/2 f kT

حيث f عدد درجات الحرية للجزىء

الطاقة المنقولة عبر المستوى SS لوحدة المساحات فى وحدة الزمن بواسطة الجزيئات التى تعبرها من أعلى لأسفل هى :

$$\frac{1}{4}\ n\ \bar{v}\ .\ \frac{f}{2}\ k\left(T+\frac{2}{3}\ \lambda\ \frac{dT}{dy}\right)$$

الطاقة التى تنقلها الجزيئات خلال نفس المساحة فى نفس الزمن من أسفل إلى أعلى هى :

$$1/4\ \ n\ \ v\ \ f/2\ \ k\left(T\ -\ 2/3\ \ \lambda\ \ \frac{dT}{dy}\right)$$

∴ معدل تدفق الطاقة لوحدة المساحات وهي كمية الحرارة المارة فى وحدة المساحات فى وحدة الزمن هى :

$$H=\frac{1}{6}\ n\ \bar{v}\ f\ k\ \lambda\ \frac{dT}{dy}$$

ولكن من تعريف معامل التوصيل الحرارى K

$$H=K\,A\ \frac{dT}{dy}$$

حيث (A) هى المساحة التى تمر خلالها كمية الحرارة (H) ونعتبرها هنا الوحدة .

∴ بحذف $\frac{dT}{dy}$ نحصل على :

$$K=\frac{1}{6}\ n\ \bar{v}\ f\ k\ \lambda$$

عندما يكون الغاز تاما تكون عدد دجات الحرية f = 3 تصبح معادلة التوصيل الحرارى له :

$$K=1/2\ n\ v\ \lambda\ k$$

وتطبق هذه المعادلة على حالة الغاز الإلكترونى الحر فى الفلزات .

النسبة بين k و η :

من معادلتى لزوجة الغاز ومعامل توصيله :

$$\frac{K}{\eta} = \frac{1/6\ f\ v\ k\lambda}{1/3\ m\ n\ v\ \lambda} = \frac{f}{2} \cdot \frac{k}{m}$$

لكن للغاز التام :

$$m = \frac{M}{N_0} \qquad k = \frac{R}{N_0} \quad \& \ Cv = \frac{f}{2}\ R$$

حيث M هو الوزن الجزيئى ، No هو عدد أفوجادرو .

$$\therefore \quad \frac{K}{\eta} = \frac{Cv}{R} \cdot \frac{k}{m} = \frac{Cv}{N\ .\ m} = \frac{Cv}{M}$$

$$\therefore \quad \frac{K\ .\ M}{\eta\ .\ Cv} = 1$$

هذه النتيجة وإن كانت قريبة من الصحة عمليا لبعض الغازات ، إلا أنها تحيد عن ذلك للغازات المعقدة جزيئيا حيث لا تنطبق فروض الغاز التام عليها .

الانتشار فى الغازات :

يحدث الانتشار نتيجة للحركة الجزيئية العشوائية داخل المادة ، كلما كان هناك ميل تركيزى concentration gradient لأى نوع من الجزيئات ، أى عندما يكون عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم على أحد جانبى سطح ما داخل المادة أكبر من العدد المناظر على الجانب الآخر .

إذا لم يوجد سوى نوع واحد من الجزيئات داخل المادة فإن حركتها تحدث ما يسمي بالانتشار الذاتى ، ويدرس عادة هذا النوع من الانتشار بواسطة المواد المشعة الاقتفائية radio tracers « الايسو توبس » .

اعتبر 'SS سطح وهمى ، (شكل ٣-٦) ، داخل خليط من جزيئات مشعة وغير مشعة من غاز ما . نفرض أن كثافة الغاز فى كل مكان واحدة ويكون بذلك ضغط الغاز منتظما .

نفرض أن درجة الحرارة ثابتة ومنتظمة .

نفرض أن n هو عدد الجزيئات المشعة فى وحدة الحجوم عند نقطة ما داخل الغاز وتتغير فى الاتجاه السينى فقط وهو العمود على المستوى الرأسى .

نفرض أن ميل التركيز concentration gradient $\frac{dn}{dx}$ منتظما وموجبا بحيث تزداد n من اليسار إلى اليمين . إذا كانت n_0 هى عدد الجزيئات المشعة فى وحدة الحجوم عند المستوى الرأسى SS' يكون التركيز على بعد x من هذا المستوى هو .

$$n = n_0 + x \frac{dn}{dx}$$

شكل (٣-٦)

يكون تيار الجزيئات المشعة الذى يعبر المستوى SS' من اليمين لليسار أكبر من تيار الجزيئات المشعة العابرة من اليسار لليمين .

نفرض أن العدد الفعلى (net number) للجزيئات التى فى الاتجاه الموجب لـ x خلال وحدة المساحات فى وحدة الزمن هو J . يعرف معامل الانتشار D بالمعادلة .

$$J = -D \frac{dn}{dx}$$

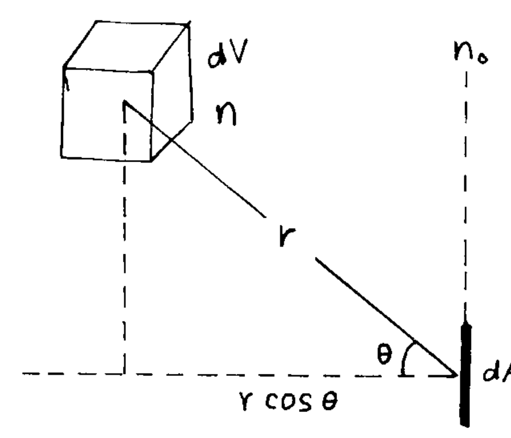
والإشارة السالبة هنا تعنى أنه عندما يكون الميل التركيزى $\frac{dn}{dx}$ موجبا فى اتجاه تزايد x يكون التيار الجزيئى J سالبا أى فى اتجاه تناقص x .

نفرض أن $n^{\backslash}$ هو العدد الكلى للجزيئات فى وحدة الحجوم مشعة وغير مشعة . (يلاحظ أن هذا العدد ثابت فى جميع النقط) ولكن نسب المشع إلى غير المشع هى التى

تختلف .

العدد الكلى للجزيئات التى لها مسارات حرة تبدأ من الحجم dV وبعضها يصل للمساحة dA فى الزمن dt هى $z\ n^{\backslash}\ dV\ dt$.

(انظر شكل ٣ - ٧)



شكل (٣-٧)

نسبة عدد الجزيئات المشعة إلى العدد الكلى للجزيئات = $\frac{n}{n^{\backslash}}$

∴ عدد الجزيئات المشعة التى مساراتها الحرة تبدأ من dV وبعضها يصل dA فى زمن dt يساوى

$$\frac{n}{n^{\backslash}} \cdot z\ n^{\backslash}\ dV\ dt = z\,n\ dV\ dt$$

عدد الجزيئات المشعة التى تعبر dA بدون أن تعانى أى تصادم ، وتكون قادمة من الحجم dV تساوى :

$$\frac{1}{4\pi}\ z\,n\ \ dA\ \ dt\ \ \sin\theta\ \cos\ \theta\ e^{-r/\lambda}\ \ d\theta\ \ d\phi\ \ dr$$

لكن من هندسة الشكل :

$$n = no - r\ \cos\ \theta\ \frac{dn}{dx}$$

وبالتعويض :

∴ عدد الجزيئات المشعة التى تعبر dA فى الزمن dt هى :

$$\frac{1}{4\pi}\ z\,n_0\ \ dA\ \ dt\ \ \sin\theta\ \cos\ \theta\ e^{-r/\lambda}\ \ d\,\theta\ \ \phi\,dr$$

$$-\frac{1}{4\pi}\ z\ \frac{dn}{dx}\ \ dA\ \ dt\ \ \sin\theta\ \cos^2\ \theta\ .\ r\,e^{-r/\lambda}\ \ d\,\theta\,d\ \ \phi\,dr$$

وبإجراء التكامل على θ من $0 \longrightarrow \pi/2$ وعلى φ من $0 \longrightarrow 2\pi$

وعلى r من $\infty \longrightarrow 0$ نحصل على :

$$1/4\ z\ n_0\ \lambda\ dA\ \ dt\ -\ 1/6\ z\ \lambda^2\ \frac{dn}{dx}\ dA\ \ dt$$

التيار الجزيئى من اليسار لليمين خلال وحدة المساحة فى وحدة الزمن هو

$$\overrightarrow{J} = 1/4\ z\ n_0\ \lambda\ -\ 1/6\ z\ \lambda^2\ \frac{dn}{dx}$$

التيار الجزيئى من اليمين لليسار خلال وحدة المساحة فى وحدة الزمن هو :

$$J = \frac{1}{4}\ z\ n_0\lambda\ +\ \frac{1}{6}\ z\ \lambda^2\ \frac{dn}{dx}$$

عدد الجزيئات الفعلى الذى يتدفق من اليسار لليمين يساوى :

$$J = -\frac{1}{3}\ z\ \ \lambda^2\ \frac{dn}{dx}$$

ومن معادلة الانتشار $J = -D\ \frac{dn}{dx}$ نحصل على :

$$D = \frac{1}{3}\ z\ \ \lambda^2$$

لكن $z = \frac{\overline{v}}{\lambda}$

$$\therefore\ D = 1/3\ \overline{v}\ \lambda$$

وباستخدام معادلة اللزوجة :

$$\eta = 1/3\ n\ m\ \overline{v}\ \lambda = \rho\ .\ D$$

وبمعرفة أن ($n\ m = \rho$) نحصل على معامل الانتشار D على الصورة

$$D = \frac{\eta}{\rho}$$

مسائل علي الباب الثالث

١ – أوجد معامل لزوجة الهواء علماً بأن كثافته $1.293\ Kg\ /\ m^3$ ومتوسط السرعة الجزيئية $4.6 \times 10^2\ m/s$ ومتوسط طول المسار الحر $6.4 \times 10^{-8}\ m$ فى المعدلين .

٢ – مدفع إلكترونى يخرج إلكترونات إلى حيز به غاز ضغطه $100\ n\ /\ m^2$ وتجمع الالكترونات المتبقية بعد التصادم مع جزيئات الغاز بواسطة لوح معدنى على بعد $10\ cm$ من المدفع حيث يقاس التيار :

إذا كان التيار الإلكتروني المنبعث من المدفع $100\ \mu A$ وتيار لوح التجميع $37\ \mu A$.

أ – أوجد متوسط طول المسار الحر للإلكترونات .

ب – ماذا يصبح تيار اللوح المعدنى إذا أنقص ضغط الغاز إلى $50\ n\ m^{-2}$

٣ – أوجد الفرق بين متوسط المسار الحر لجزيئات الهليوم تحت ضغط جوى عند درجتى حرارة $(0^\circ C\ \&\ 100^\circ C)$.

لزوجة الهليوم بوحدات سم . جم ثانيه عند درجة $0^\circ C = 0.00019$

وعند درجة $100^\circ C = 0.00023$

كثافة الهليوم = 0.0001785 جم / سم٣

٤ – أثبت أن لزوجة أى غاز لا تتوقف على ضغطه أو كثافته ، ولكنها تتناسب طرديا مع الجذر التربيعى لدرجة حرارته المطلقه . ثم أوجد قطر الجزيء بدلالة لزوجة الغاز ودرجة حرارته المطلقه .

٥ – يبين الجدول التالى تغير لزوجة غاز ثانى أكسيد الكربون مع درجة الحرارة

$t\ ^\circ C$	-21	0	100	182	302
$\eta \times 10^6$	12.9	14	18.6	22.2	26.8

احسب النسبة بين η ، $\sqrt{T}$ ثم أوجد قطر الجزىء ، علما بأن الوزن الجزيئى لثانى أكسيد الكربون 44 kg / mole .

الباب الرابع

إحصاء ماكسويل وبولتزمان

Maxwell - Boltzmann statistics

فراغ الطور : phase space

اعتبر غازاً أحادى الذرة . كل جزىء من جزيئاته يتعرف تماما إذا عرفت له ستة أبعاد هى:

$$\left(v_x\ ,\ v_y\ ,\ v_z\ ,x,y,x\right)$$

سبق أن عرفنا فراغ السرعات Velocity space وهو الذى تكون إحداثياته هى $v_x\ ,v_y\ ,\ v_z$ لنتخيل الآن فراغا ذا ستة أبعاد تتحدد فيه تماما حالة كل جزىء من جزيئات الغاز .

نقسم هذا الفراغ إلى خلايا cells صغيرة أبعادها dx, dy, dz $dv_x,\ dv_y, dv_z$ نفرض أن بكل خلية عدد كبيرا من النقط التى تمثل كل منها حالة جزىء. نفرض أن حجم الخلية هو :

$$H = dx\ dy\ dz\ dv_x\ dv_y\ dv_z$$

كثافة النقط فى فراغ الطور (العدد فى وحدة الحجوم) هو :

$$\rho = \frac{Ni}{H}$$

حيث Ni هو عدد النقط فى الخلية رقم i والكثافة ρ هى دالة للإحداثيات الستة للخلية i وستعطى الميكانيكا الإحصائية شكل هذه الدالة .

الحالة الماكرونية والحالة الميكرونية : Micro - and Macro - states

الحالة الميكرونية لمجموعة من الجزيئات هى التى تتحدد فيها تماما الستة أبعاد لكل جزىء فى المجموعة . بينما الحالة الماكرونية لها هى التى يمكن قياسها فى المعمل .

ليس من الضرورى تحديد الحالة الميكرونية لتحديد الخواص الماكرونية للغاز ، فمثلا ضغط الغاز يتوقف على عدد الجزيئات التى لها سرعات معينة ، وليس على أى الجزيئات لها هذه السرعات ، أى إن عدد النقط فى كل خلية من خلايا فراغ الطور هو الذى يحدد الخواص المرئية للغاز « observed properties »

لهذا فإن الأعداد Ni تعرف الحالة الماكرونية للغاز .

مثال : « الكلية بفصولها المختلفة » : يحدد الحالة الماكرونية للطلبه عدد الطلبة على كل صف وليس من هم الطلبة فى كل صف .

من الفروض الأساسية فى الميكانيكا الإحصائية أن جميع الحالات الميكرونية تتساوى فى احتمال حدوثها . « All microstates are equally probable »

الاحتمال الديناميكى الحرارى : Thermo - dynamic probability

يعرف الاحتمال الديناميكى الحراري بأنه عدد الحالات الميكرونية الغير متماثلة التى تعطى حالة ماكرونية معينة .

« Number of micro -states corresponding to a given macro -state ».

مثال :

نفرض أن فراغ الطور قد قسم إلى خليتين فقط (i &j) وأن هناك أربعة نقط a,b, c, d نفرض أن Ni & Nj هو عدد النقط الموجود بكل خلية .

الحالات الماكرونية المحتملة هى :

Ni	4	3	2	1	0
Nj	0	1	2	3	4

وعددها خمس حالات . لكل حالة من هذه الحالات عدد مختلف من الحالات الميكرونية micro - states فمثلا $Ni = 3 \ \& \ Nj = 1$ لها أربع حالات ميكرونية غير متكررة .

أى أن :

الخلية i	bcd	cda	dab	abc
الخلية j	a	b	c	d

$w = 4$

أى أن الاحتمال الدينامكى الحرارى لهذه الحالة الماكرونية هو ٤ ويوجد هذا الاحتمال بحساب عدد التبادل فى النقط فى فراغ الطور التى تعطى نفس الحالة الماكرونية . وعدد هذه التباديل الكلية لعدد N لعدد نقط هو $N!$

ولما كان تغيير ترتيب النقط داخل الخلية لا يغير من حالتها

« مثلا : cbd = dbc = bcd = ... وهكذا »

لذلك إذا كان عدد النقط فى الخلية Ni = ٣ فى المثال السابق يكون عدد التباديل المتماثلة هو $N_i!$

ويكون العدد الفعلى للتباديل **غير المتماثلة** والتى تعطى نفس الحالة الماكرونية هى :

$$W = \frac{N!}{N_1! \, N_2! \, N_3! \, ... \, N_i!}$$

$$= \frac{N!}{\Pi N_i!}$$

وبدهى أنه إذا كانت الخلية فارغة أى أن $N_i = 0$ يكون $N_i! = 1$

وبالعودة إلي مثال الخمس حالات ماكرونية السابق يكون الاحتمالات الديناميكية الحرارية هى :

$$N_i \quad N_j$$

$$W = (4\ ,0) = \frac{4!}{4!\,0!} = 1$$

$$W = (3\ ,1) = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

$$W = (2\ ,2) = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

$$W = (1\ ,3) = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$$

$$W = (0\ ,4) = \frac{4!}{0!\,4!} = 1$$

يوجد هناك **أكبر** احتمال ديناميكى حرارى عند $Ni = 2\ ;\ Nj = 2$ كما يوجد ١٦ حالة ميكرونية لعدد ٥ حالات ماكرونية .

دالة التقسيم . The Partition function Z

فى الحالة العامة : اعتبر حالة غاز عدد جزيئاته N وعدد الجزيئات فى كل خلية من فراغ الطور Ni الاحتمال الديناميكى الحرارى : -

$$W = \frac{N!}{\Pi\ Ni}$$

بأخذ اللوغاريتمات :

$$\text{In}\ W = \text{In}\ N! - \sum \text{In}\ (N_i\,!)$$

$$= N\ \text{In}\ N - N - \sum Ni\ \text{In}\ Ni + \sum Ni$$

$$\boxed{\text{In}\ W = N\ \text{In}\ N - \sum N_i\ \text{In}\ N_i}$$

يلاحظ أن $\text{In}\ \Pi\ N! = \sum \text{In}\ N! \quad \& \quad N = \sum N_i$

عند الاتزان تكون حالة الغاز عند أكبر احتمال ديناميكى حرارى .

maximum thermodynamic probability , W^o

ولذلك تكون W_{max} & $\ln W_{max}$ أكبر ما يمكن وشرط ذلك رياضيا هو :

$$\delta (\ln W_{max}) = 0$$

$$\therefore\ 0 = \Sigma N_i\ \delta\ (\ln N_i) + \Sigma \ln N_i\, \delta N_i$$

« التفاضل بالنسبة إلى N_i وتفاضل الحد الأول فى معادلة W يساوى صفراً »

ولكن

$$\Sigma N_i\, \delta \ln N_i = \Sigma N_i \times \frac{1}{N_i}\, \delta N_i = 0$$

ولأن مجموع الجزيئات ثابت . $\therefore\ \Sigma\ \delta\ N_i = 0$

.... (A) $\therefore\quad \Sigma \ln N_i\ \delta\ N_i = 0$

أى أن

$$\ln N_1\ \delta N_1 + \ln N_2\ \delta N_2 + ... = 0$$

وبما أن مجموع الجزيئات ثابت

...... (B) $\therefore\quad \Sigma\, \delta\ N_i = 0$

وإذا كان عـدد النقط فى الخليـة قد تغـير بمقـدار δN_i فـإن طاقة الخلية تتـغـير بمقدار $\omega_i\, \delta N_i$ ولكن بما أن الطاقة الداخلية الكلية ثابتة بتلاشى مجموع هذه التغيرات للخلايا المختلفة .

..... (C) $\therefore\quad \Sigma\, \omega_i\, \delta\ N_i = 0$

بضـرب المعـادلة (B) فـى $-\ln \propto$ والمعـادلة C فى B حيث $\propto$ & β ثـوابـت

وبجمع المعادلات C, B, A نحصل على :

$$\Sigma\, (\ln N_i - \ln \propto + \beta\, \omega_i)\, \delta\ N_i = 0$$

وبما أن التـغـير فى عدد N_i يأتى عن طريق الحركة الجزيئـية للغـاز والتصـادم بين الجزيئات ، وهذه عمليات عشوائية ، لذلك لا تتوقف قيم δN_i على بعضـها بالنسبة للخلايا

المختلفة ، ولذلك يتلاشى معامل δN_i فى المعادلة السابقة .

$$\therefore \quad \ln N_i - \ln \propto + \beta \omega_i = 0$$

$$\therefore \quad N_i = \propto \exp(-\beta \omega_i)$$

وبما أن عدد الجزيئات الكلية ثابتة

$$\therefore \quad \Sigma N_i = N = \propto \Sigma (\exp - \beta \omega_i)$$

وتعرف الدالة : $Z = \Sigma (\exp - \beta \omega_i)$ بدالة التقسيم . Partition function

وتتوقف على الثابت β وعلى الطريق التى تتغير بها الطاقة ω_i من خلية إلى أخرى .

$$\therefore \text{الثابت} \quad \frac{N}{Z} = \frac{\text{عدد الجزيئات}}{\text{دالة التقسيم}} = \propto$$

عدد الجزيئات فى كل خلية

$$N_i = \frac{N}{Z} \exp(-\beta \omega_i)$$

حيث : $Z = \Sigma \exp(-\beta \omega)$

الإنتروبيا والاحتمال : Entropy and probability

استنتجنا دالة التقسيم Z بفرض وجود اتزان ديناميكى حرارى فى المجموعة ، أى عندما تكون للحالة الماكرونية أكبر احتمال ديناميكى حرارى W_{max} . « هذا الشرط يعطى « $\delta \ln W_{max} = 0$

ومن وجهة نظر الديناميكا الحرارية فحالة الاستقرار هذه لمجموعة مطلقة يصاحبها أكبر إنتروبيا

فالإنتروبيا S فى الديناميكا الحرارية يقابلها فى الميكانيكا الإحصائية الاحتمال الدينامكى الحرارى W ، ويمكن فرض تناسبها على الصورة

$$\boxed{S = k \ln W}$$

وقد وضع التناسب على شكل دالة لوغارتيمية ، وذلك للحصول على إتفاق بين تعاريف

الديناميكا الإحصائية والديناميكا الحرارية .

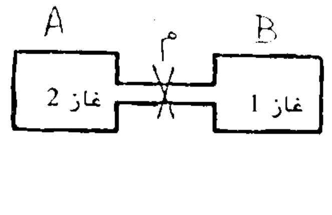
« سنرى فيما بعد أن ثابت التناسب k هو ثابت بولتزمان »

تفسر الميكانيكا الإحصائية الزيادة المستمرة فى الإنتروبيا حتى تصل إلى قيمة عظمى « القانون الثانى للديناميكا الحرارية » على أساس اتجاه طبيعى لأى مجموعة معزولة لكى تتحول من حالة أقل احتمالا إلى أخرى أكثر احتمالا .

ويستخدم أحيانا مصطلح درجة الفوضى « disorder » وهو عكس درجة الترتيب لتعريف الإنتروبيا .

مثال : حالة غازين A & B فى غرفتين يفصلهما صمام. فى البداية يكون كل غاز فى ناحية . (أنظر الشكل)

عند فتح الصمام تبدأ جزيئات الغازين فى الانتشار وبعد فترة نصل إلى حالة عند ما تكون درجة الترتيب أقل ما يمكن ، والاحتمال الدينامكى الحرارى أكبر ما يمكن وكذلك الإنتروبيا .



شكل (٤-١)

إيجاد قيمة دالة التقسيم Z بدلالة دوال الحالة U, S, F فى الديناميكا الحرارية :

سبق أن توصلنا لمعادلة الاحتمال الديناميكى الحرارى W على الصورة

$$\ln W = N \ln N - \Sigma N_i \ln N_i$$

لكن

$$N_i = \frac{N}{Z} \exp(-\beta \omega_i)$$

$$\therefore \ln N_i = \ln N - \ln Z - \beta \omega_i$$

وبالتعويض من المعادلة السابقة فى معادلة In W نحصل على :

$$\ln W = N \ln N - \Sigma N_i (\ln N - \ln Z - \beta \omega_i)$$

$$\therefore \quad \ln W = N \ln N - \ln N \Sigma N_i + \ln Z \Sigma N_i + \beta \Sigma \omega_i N_i$$

ولكن $\Sigma N_i = N \quad \& \quad \Sigma \omega_i N_i = U$

حيث U هى الطاقة الداخلية الكلية للمجموعة .

$$\because \quad S = k \ln W$$

$$\therefore S = Nk \ln Z + k \beta U \qquad \ldots\ldots (1)$$

حتى هذه المرحلة لم تظهر درجة الحرارة فى النظرية الإحصائية ، ويمكن إدخالها باستخدام قوانين الديناميكا الحرارية :

$$dQ = dU + dW = TdS$$

$$\therefore dU = TdS - pdV$$

وعند ثبوت الحجم

$$\therefore \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_v = T$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_v = \frac{1}{T} \qquad \ldots\ldots (2)$$

بمفاضلة المعادلة (١) بالنسبة إلى U

مع تثبيت الحجم نحصل على :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_v = Nk. \frac{1}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)_v + k\beta + kU\left(\frac{\partial \beta}{\partial U}\right)_v$$

$$\therefore \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_v = \frac{Nk}{Z}\frac{dZ}{d\beta}\left(\frac{\partial \beta}{\partial U}\right)_v + k\beta + kU\left(\frac{\partial \beta}{\partial U}\right)_v \qquad \ldots\ldots (3)$$

لكن $Z = \sum \exp(-\beta \omega_i)$ وبالمفاضلة بالنسبة إلى β

$$\therefore \frac{dZ}{d\beta} = -\left(\sum \omega_i\right) \exp - \beta \omega_i = -\frac{UZ}{N} \qquad \ldots\ldots (4)$$

$$\left[\sum \omega_i e^{-\beta\omega_i} = \frac{1}{N}\sum N_i \omega_i e^{-\beta\omega_i} = \frac{U}{N}\sum e^{-\beta\omega_i} = \frac{UZ}{N} .>>\right] \& \left[\sum N_i\omega_i = U ; \sum e^{-\beta\omega_i} = Z\right]$$

وبالتعويض من (4) في (3) نحصل على :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_v = k\beta \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

وتنطبق المعادلة (5) التى استنتجت باستخدام الميكانيكا الإحصائية مع المعادلة (٢) التى استنتجت باستخدام الديناميكا الحرارية ، وذلك بوضع

$$k\beta = \frac{1}{T}$$

أو :

$$\boxed{\beta = \frac{1}{kT}}$$

وبذلك تكون عدد النقط فى الخلية i فى فراغ الطور بدلالة درجة الحرارة المطلقة هو :

$$N_i = \frac{N}{Z} \exp\left(-\omega_i / kT\right)$$

ودالة التقسيم Z

$$Z = \Sigma \exp\left(-\omega_i / kT\right)$$

والطاقة الداخلية للمجموعة U (وبالتعويض بدلا من N_i بما يساويها)

$$U = \Sigma\, \omega_i N_i = \frac{N}{Z} \Sigma\, \omega_i \exp\left(-\omega_i / kT\right)$$

ومن مفاضلة معادلة Z :

$$\therefore \frac{dZ}{dT} = \frac{1}{kT^2} \Sigma\, \omega_i \exp\left(-\omega_i / kT\right)$$

وبالتعويض فى معادلة U نحصل على :

$$U = \frac{NkT^2}{Z} \frac{dZ}{dT} = NkT^2 \frac{d(\ln Z)}{dT}$$

وبالتعويض فى معادلة الإنتروبيا S :

$$\therefore \quad S = Nk \ln Z + \frac{U}{T}$$

وتكون دالة هيلمهولتز $F = U - TS$

$$F = -NkT \ln Z$$

من المعادلات السابقة يتضح أنه إذا ماحسبت قيمة دالة التقسيم Z يمكن تعيين جميع الخواص الديناميكية الحرارية للمجموعة .

مسائل وتمارين علي الباب الرابع

١ – فى تجربة شتيرن وجيرلاخ تترتب العزوم المغناطيسية للذرات أما موازية أو عكس موازية لاتجاه المجال . أوجد باستخدام الميكانيكا الإحصائية العزم المغناطيسى الكلى فى اتجاه المجال :

١ – إذا كان المجال قويا ودرجة الحرارة منخفضة

٢ – إذا كان ضعيفا ودرجة الحرارة مرتفعة .

الحل : نفرض أن B هو العزم المغناطيسى للذرة بالبوهر ماجنتون . الطاقة المغناطيسية للذرة فى اتجاه المجال $w_1 = -BH$ وفى عكس اتجاه المجال $w_2 = +BH$

بما أنه لا يوجد سوى مستويين فقط للطاقة :

∴ دالة التقسيم

$$Z = \sum e^{-\beta \omega i}$$

$$Z = e^{-w_1/kT} + e^{+W_2/kT}$$

$$= e^{-x} + e^{+x}$$

$$x = \frac{BH}{kT}$$

$$\therefore Z = 2 \cosh x$$

عدد الذرات لوحدة الحجوم فى مستويى الطاقة W_1 ، W_2 هما :

$$n_1 = n \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$$

حيث n هو العدد الكلى للذرات فى وحدة الحجوم

$$n_2 = n \cdot \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

العزم المغناطيسى الكلى فى اتجاه المجال هو :

$$M = B(n_1 - n_2)$$

$$= nB \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = n B \tanh x$$

حيث $x = \frac{BH}{kT}$ إذا كانت x صغيرة فإن tanh x تساوى تقريبا x.

ويكون $M = n B^2 H / kT$ وهذا هو قانون كورى للمجالات المغناطيسية الضعيفة ، وفى درجات الحرارة العالية

أما إذا كانت x كبيرة فإن tanh x تساوى تقريبا واحداً ، ويصبح $M = B. n$

٢ – اعتبر فراغ الطور مقسم إلى ثلاث خلايا 3 ,2 ,1 ، وأن $N = 30$ ،

$w_1 = 2J ; w_2 = 4J , w_3 = 6J$ ؛ $N_1 = N_2 = N_3 = 10$

فإذا كانت $\delta N_3 = -2$. فأوجد δN_1 ، δN_2 عند حالة الاستقرار الحرارى .

الحل :

بما أن $\delta U = 0$ & $\delta N = 0$ اذاً $\Sigma \ln N_i \, \delta N_i = 0$

∴ فالحالة مستقره $\Sigma \omega_i N_i \, \delta N_i = 0$

$$\therefore \ln 10 \, \delta N_1 + \ln 10 \, \delta N_2 + \ln 10 \, \delta N_3 = 0$$

$$\therefore \delta N_1 + \delta N_2 + \delta N_3 = 0$$

$$\therefore \delta N_1 + \delta N_2 = 2 \qquad \ldots (1)$$

أيضا (2) .....

$$2 \, \delta N_1 + 4 \, \delta N_2 + 6 \, \delta N_3 = 0$$

وبحل المعادلتين نحصل على :

$$\delta N_2 = 4$$

$$\delta N_1 = -2$$

٣ – أوجد الاحتمال الديناميكى الحرارى لكل من :

أ – التوزيع الأكثر احتمالا .

ب – التوزيع الأقل احتمالاً .

لمجموعة مكونة من 10^6 molecules فى فراغ طور مقسم إلى 5×10^5 cells

خليه علما بأن طاقه الجزىء ω_i واحدة لجميع الخلايا .

٤ – مجموعة من N جسم . فراغ الطور لها مقيم إلى m خلية فإذا كانت طاقة الجسيم واحدة لجميع الخلايا كما أن $N >> m$

أوجد عدد النقط فى كل خلية ، وكذلك الطاقة الداخلية وإنتروبيا المجموعة .



الجزء الثانى

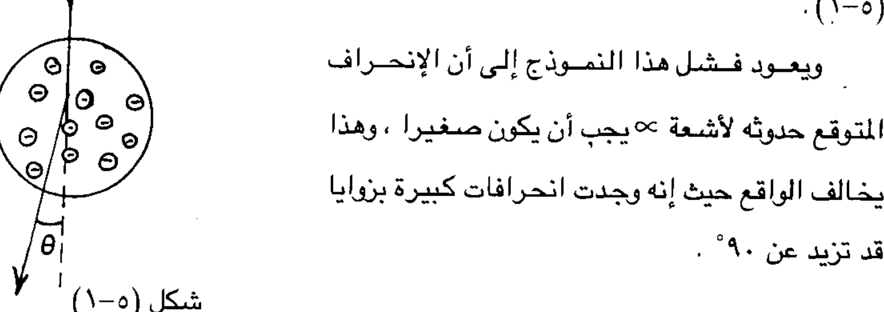
الباب الخامس
النظرية الذرية للحالة الصلبة
Atomic theory of the solid state

نستعرض أولاً وبسرعة تركيب الذرة

الذرة وتركيب المادة :

كان تومسون هو أول من حاول وضع نموذج للذرة وفيه افترض أن الشحنة الموجبة فى الذرة تتوزع بانتظام داخل كرة ، وأن الإلكترونات تتخللها وتحتل أماكن معينة بها ، شكل (٥-١).

ويعود فشل هذا النموذج إلى أن الإنحراف المتوقع حدوثه لأشعة ∝ يجب أن يكون صغيرا ، وهذا يخالف الواقع حيث إنه وجدت انحرافات كبيرة بزوايا قد تزيد عن °٩٠ .

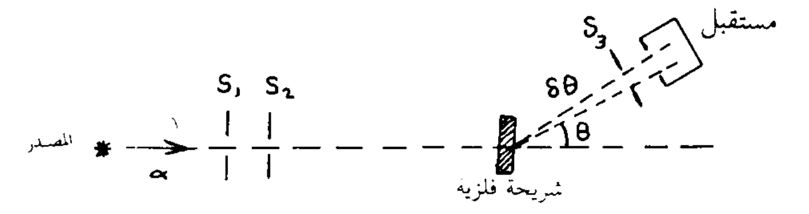


شكل (٥-١)

نموذج رذرفورد : افترض رذرفورد أن الشحنة الموجبة تتركز فى حيز صغير جدا (أقل من 10^{-12} سم) وأن الإلكترونات تحيط هذه النواة بشكل ما .

وقد استخدمت تجربة تشتت جسيمات ∝ لدراسة كيفية توزيع الكتلة والشحنة داخل الذرة ، شكل (٥ - ٢) .

تسقط حزمة من أشعة ∝ على شريحة رقيقة من فلز ، ويمكن دراسة التوزيع الزاوى للجسيمات المستطارة Angular distribution بواسطة شاشة فلورية أو غرفة تأين I . C . detector.



ولتفسير النتائج رياضيا فرض رذرفورد ما يأتى :   شكل ٥ – ٢

١ – الذرة عبارة عن فراغ فيما عدا كتلتها وهى مركزة فى نقطة .

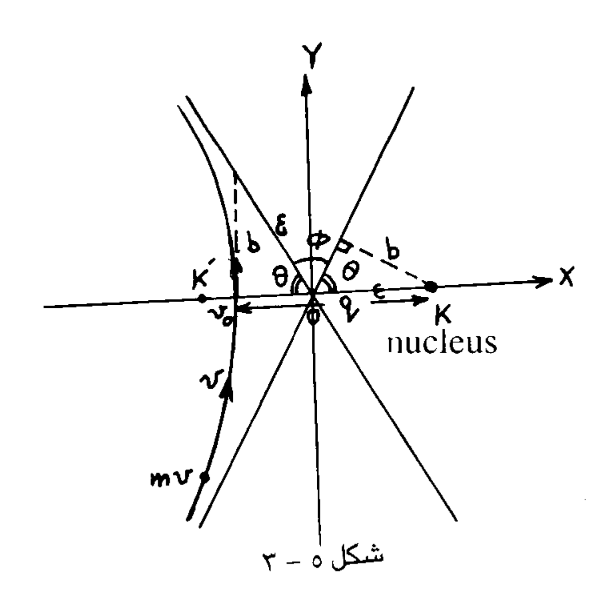
٢ – القوى الكولومية بين جسيمات ∝ والنواة هى فقط التى تحدد انحراف المسار للجسيمات .

٣ – استخدام رذرفورد ميكانيكا نيوتن لتعيين انحراف المسار .

معادلة رذرفورد للتشتيت :

نفرض أن الشحنة على النواة Ze وأن جسيم ∝ يقترب من نواة الذرة عند K فينحرف مساره صانعا قطعاً زائداً تنطبق إحدى بؤرتيه مع النواة K ، شكل (٥–٣) .

b = المسافة العمودية بين النواة K واتجاه جسيم ∝ الأصلى وتسمى b : بمعامل التصادم impact parameter .



شكل ٥ – ٣

أما q فهى المسافة من K إلى رأس القطع الزائد .

ومن هندسة الشكل : $q = \varepsilon (1 + \cos \theta)$.

حيث ε هى المسافة OK وتسمى eccentricity ،

و θ هى الزاوية بين الاتجاه الأصلى للجسيم والاتجاه السينى من الشكل :

$$\varepsilon = \frac{b}{\sin \theta}$$

$$q = a + \varepsilon = \varepsilon \cos \theta + \varepsilon = \varepsilon (1 + \cos \theta)$$

$$\therefore\ q = \frac{b (1 + \cos \theta)}{\sin \theta} \qquad \therefore\ \frac{b}{q} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

نفرض أن v هى سرعة الجسيم بعيدا عن النواة وأن v_0 هى سرعته عندما يكون أقرب ما يمكن منها ، وإن m هى كتلته .

بتطبيق قانون بقاء الطاقة :

$$1/2\, m\, v^2 = 1/2\, m\, v_0^2 + \frac{Z e E}{q}$$

« طاقة الموضع فى أقرب نقطة + طاقة الحركة فى أقرب نقطة = طاقة الحركة الأصلية للجسيم » .

$E = 2e$ هى مقدار الشحنة على الجسيم ∝ .

بوضع

$$K = \frac{Z e E}{m v^2}$$

وباختصار المعادلة بالضرب × $\frac{2}{m v^2}$ نحصل على :

$$\frac{v_0^2}{v^2} = 1 - \frac{2K}{b} \cdot \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

وبتطبيق قانون بقاء كمية الحركة الزاوية conservation of angular momentum

نحصل على :

$$m\, v\, b = m\, v_0\, q$$

$$\therefore \quad \frac{v_0}{v} = \frac{b}{q} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{v_0^2}{v^2} = \frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \qquad \ldots (2)$$

ومن المعادلتى (١) ، (٢) وبالاختصار نحصل على $b = K \tan\theta$ لكن من الشكـــل $\phi = \pi - 2\theta$ حيث ϕ هى زاوية انحراف الجسيم ∝ .

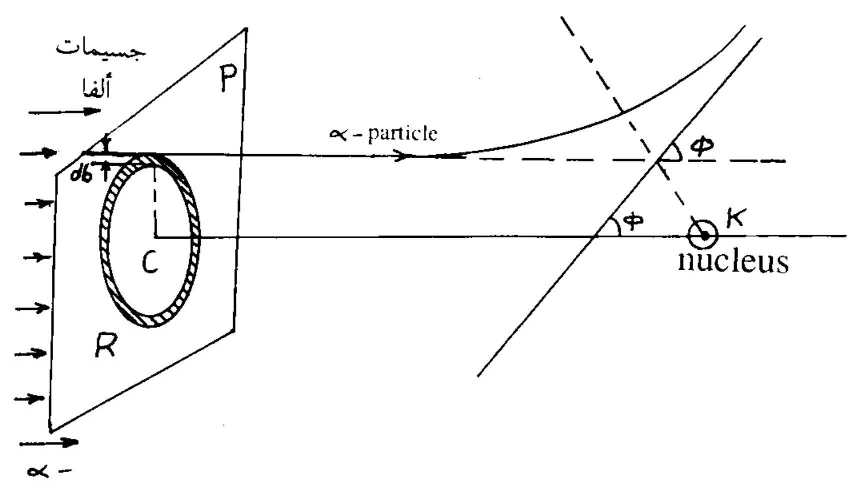
$$\therefore \quad \theta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}\right)$$

$$\therefore \quad b = K \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}\right) = K \cot\frac{\phi}{2} \qquad \ldots (3)$$

هذه المعادلة تعطى مقدار انحراف الجسيم ، ولكن بدلالة b التى لا يمكن قياسها بطريقة مباشرة فى المعمل .

حساب عدد جسيمات ∝ التى تنحرف بزاوية معينة :

نفرض مستوى P عموديا على اتجاه أشعة ∝ ، شكل (٥-٤)



شكل ٥ – ٤

نفرض K نواة ذرة فى طريق الأشعة .

مسقط K على المستوى P هو C .

جميع الجسيمات التى تمر خلال الحلقة R التى أنصاف أقطارها b & b + db تتعرض لانحراف يقع بين (ϕ & $\phi + d\phi$) .

نفرض أن عدد الجسيمات التى تمر خلال وحدة المساحات من المستوى P هى N فى الثانية الواحدة .

عدد الجسيمات التى تعبر الحلقة P فى الثانية =

$$d N (\phi) = 2 \pi b \, d b . N$$

لكن من معادلة (3) .

$$db = K d (\cot 1/2 \phi) = \frac{K d \phi}{2 \sin^2 \phi / 2}$$

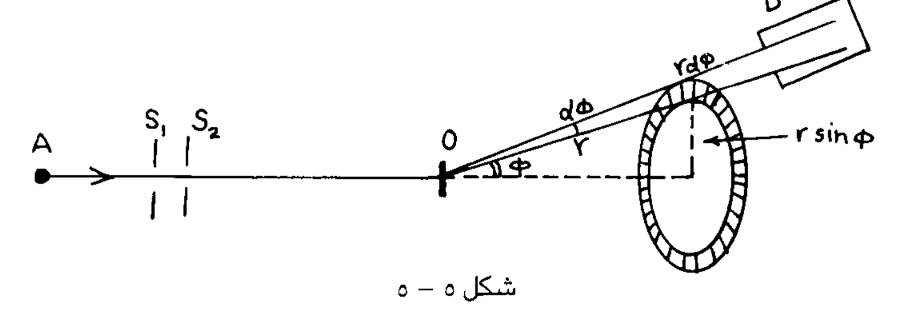
∴ عدد جسيمات ∝ التي تستطار بين ϕ , $\phi + d\phi$ هى

$$d N (\phi) = - \pi K^2 \frac{N \cos \phi}{\sin^2 \phi / 2} d \phi$$

الإشارة السالبة تعنى تناقص d N عند تزايد ϕ هذا بالنسبة لنواة ذرة واحدة .

ولكن إذا اعتبرنا أن t هو سمك شريحة الفلز الذى تستطار عليه الجسيمات ، وأن n هو عدد الذرات فى وحدة الحجوم لهذه المادة تكون عدد الذرات فى وحدة المساحات عند O هو n t ويكون العدد الكلى للجسيمات المستطارة على الشريحة فى الزاوية $d\phi$ هو :

$$d N (\phi) = \pi n t N K^2 \frac{\cos \phi / 2}{\sin^3 \phi / 2} d\phi$$



شكل ٥ – ٥

إذا كان عدد الجسيمات المستطارة D على بعد r من الشريحة O ، كما فى شكل (٥-٥) فإن العدد السابق $d N(\phi)$ يتوزع على مساحة الحلقة dA حيث نصف قطرها $2 \pi r \sin \phi$ وسمكها $r\, d\phi$

$$\therefore dA = 2 \pi r^2 \sin \phi \, d\phi$$

ويكون عدد الجسمات فى وحدة المساحات من هذه الحلقة هو :

$$N(\phi) = \frac{d N(\phi)}{d A}$$

$$= \frac{\pi \, nt \, N K^2 \cos \phi / 2}{2 \pi r^2 \sin \phi \sin^3 \phi / 2} =$$

$$= \frac{nt \, N K^2}{4 r^2 \sin^4 \phi / 2}$$

$$\therefore N(\phi) = \frac{N}{r^2} \cdot nt \cdot 1/4 \; e^4 \frac{Z^2}{K_\propto^2 \sin^4 \phi/2}$$

وقد استبدلنا $2 e = E$ فى المقدار $\frac{Z e E}{m v^2}$ ووضعنا $K = 1/2 \; m v^2$

تسمى هذه المعادلة بمعادلة الاستطارة لرذرفورد . وقد وجد أنها تتفق مع التجربة ،، مما يثبت صحة النموذج الذى افترضه رذرفورد للذرة النووية .

صعوبات هذا النموذج :

١ - إذا كانت الإلكترونات فى حالة سكون ، فلا يوجد ما يمنع سقوطها إلى داخل النواة بواسطة القوى الكولومية .

٢ - إذا كانت فى حالة حركة دائرية حولها ، فعلى حسب النظريات الكلاسيكية الكهرومغناطيسية فإن الإلكترون يشع من طاقته أثناء الحركة ، وبالتالى تنقص سرعته تدريجيا فيقترب من النواة حلزونيا حتى يسقط بداخلها .

وقد صحح بوهر فى نظريته هذه الصعوبات والتى استخدم فيها نظرية الكم لبلانك .

نظرية بوهر للتركيب الذرى :

النتائج الأساسية لنظرية الكم لبلانك هى :

١ - أى متذبذب oscillator يوجد على أحد مستويات كمية Discrete quantum states each of particular energy value . محللة يحدد كل منها قيمة طاقة معينة .

٢ - يمكن للطاقة أن تمتص أو تنبعث بكميات محددة ، وان الإشعاع ذا التردد f يكون مصحوبا بمقادير من الكم quanta قيمة كل منها hf ، حيث h هو ثابت بلانك ($h = 6.624 \times 10^{-34}$ j . sec)

فروض بوهر :

وقد استخدم بوهر النتيجة الثانية لنظرية بلانك وفرض :

١ - أن الإلكترون الذرى لا يستطيع أن يتحرك فى أى مسار حول النواة ، ولكنه يتحرك فى مستويات طاقة أو مسارات معينة .

٢ - لا يفقد الإلكترون أثناء حركته أى جزء من طاقته stationary orbit .

٣ - يمكن للإلكترون أن يقفز من مسار إلى آخر ذى طاقة أقل ، مع انبعاث كم من الطاقة يعادل الفرق بين طاقتى المسارين $E_1 - E_2 = h\ f$

٤ - فرض بوهر مسارات دائرية للإلكترون . واعتبر أن كمية الحركة الزاوية تخضع للمبدأ الكمى quantization of the angular momentum .

أى أن :

$$\therefore\ m\,v\,r = \frac{n\,h}{2\,\pi}$$

حيث r نصف قطر المسار n هو العدد الكمى وm هى كتلة الألكترون ، v سرعته .

الحالات الكمية للإلكترون فى الذرة

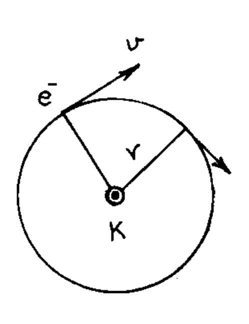
يحدث اتزان حركى للإلكترون حول النواة عندما تتساوى القوة الطاردة المركزية $\frac{mv^2}{r}$ للخارج مع القوة الجاذبية الكولومية بين شحنة الإلكترون e والنواة Z e ، شكل (٥-٦)

$$\therefore \quad \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 = \frac{Z\ e^2}{r^2}$$

وبحذف سرعة الإلكترون v من المعادلتين السابقتين

نحصل على نصف قطر المسار :

$$r = \frac{n^2\ h^2}{4\ \pi^2\ m\ e^2 Z}$$



شكل (٥-٦)

طاقة الإلكترون الكلية = طاقة حركته + طاقة موضعه

$$= - \frac{Z e^2}{r} + 1/2\ m v^2$$

$$= - \frac{Z\ e^2}{r} + 1/2 \frac{Z e^2}{r}$$

$$\therefore - 1/2 \frac{Z e^2}{r} = E_n$$

$$E_n = - \frac{2\ \pi^2 m\ e^4\ Z^2}{n^2\ h^2}$$

تعطى هذه المعادلة مستويات الطاقة المختلفة التي يمكن أن يكون عليها الإلكترون .

بالنسبة لذرة الأيدروجين : $Z = 1$ نصف قطر المسار الأول $n = 1$ هو :

$$r_o = \frac{h^2}{4\ \pi^2\ me^2} = 25.27 \times 10^{-9}\ \ cm$$

أى أن قطر الذة فى حدود ١ إنجستروم .

طيف ذرة الأيدروجين :

عندما يقفز إلكترون من مسار خارجى لمسار داخلى تنقص طاقته ، ويظهر الفرق فى الطاقة على شكل فوتون

$$E_2 - E_1 = h\ f$$

ويكون تردد خط الطيف الناتج هو :

$$f = \frac{2\pi^2 me^4 Z^2}{h^3} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

وبدلالة العدد الموجى :

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{f}$$

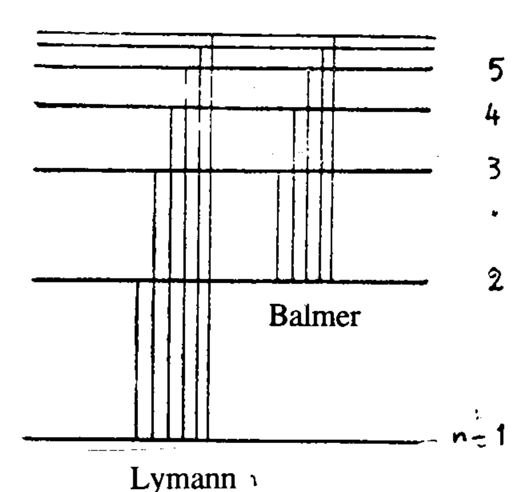
حيث :

$$\bar{f} = R Z^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

$$R = \frac{2 \pi^2 me^4}{c h^3}$$

وتسمى R_H للأيدروجين بثابت ريدبرج ويساوى

$1.097 \times 10^7 m^{-1}$

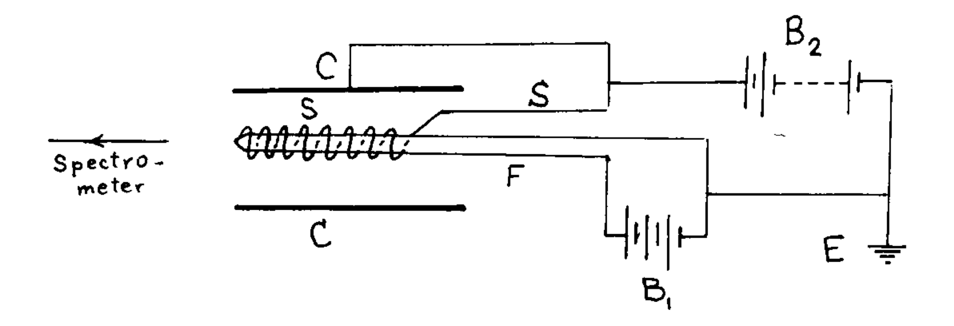


وقد فسرت نظرية بوهر ما سبق اكتشافه فى المتسلسلات الطيفية مثل متسلسلة بالمر ومتسلسلة ليمان الخ ، شكل (٥-٧) والتى تم اكتشافها بالتجربة فقط .

شكل (٥-٧)

قياس جهد الإثارة : Excitation potential

لقياس جهد الإثارة يستخدم الجهاز المبين بشكل (٥ - ٨) ويتركب من شبكة حلزونية S ،



شكل ٥ – ٨

F فتيل يسخن بواسطة بطارية B_1.

C أسطوانة معدنية تحيط بالشبكة الموضوعة فى محورها ويتصلان معا ليكون لهما نفس الجهد الكهربى .

يوجد داخل الأسطوانة C الغاز تحت الاختبار بضغط مخلخل .

يوضع فرق فى الجهد بواسطة البطارية B_2 بين الأسطوانة والشبكة وبين الفتيل F .

تتسارع الإلكترونات بواسطة جهد الشبكة . وبعد خروجها منها تتحرك فى حيز خال من أية قوى force free وذلك لتساوى جهد الشبكة والاسطوانة C .

إذا كانت طاقة الإلكترونات كافية لاحداث إثارة لذرات الغاز تخرج فوتونات يمكن رؤيتها بجهاز اسبكترومتر .

وتجرى التجربة برفع فرق الجهد بين S & F تدريجيا ، مع ملاحظة الرؤية فى المطياف . نجد أنه عند جهد معين (جهد الإثارة) يبدأ انبعاث الفوتونات من الغاز وهذه تظهر على شكل خط من خطوط الطيف .

مثال : فى حالة الصوديوم وجد أن جهد الإثارة للخط الأصفر ٢.٠٩ فولط ، فتكون طاقة الاثارة لهذا الخط $e\,V = 10^{-12} \times 1.6 \times 2.09 = 3.34 \times 10^{-12}$ ارج

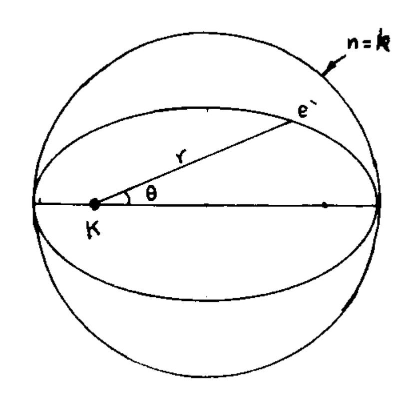
طاقة الفوتون للخط الأصفر

$$\frac{h\ c}{\lambda} = h\ f =$$

$= 3.36 \times 10^{-12}$ ارج

حركة الإلكترونات فى قطع ناقص :

اعتبر سومر فيلد حركة الإلكترونات فى قطاعات ناقصة ، كما هو الحال فى حركة الكواكب حول الشمس . تكون إحدى بؤرتى القطع هى نواة الذرة K ، انظر شكل (٥-٩)



شكل (٥ – ٩)

للإلكترون فى هذه الحالة درجتان من درجات الحرية تمثلان $r\ ;\ \theta$ بالإحداثيات القطبية . ينتج عن ذلك نوعان من كمية الحركة : ١ – كمية حركة زاوية $P\ \theta$ ٢ – كمية حركة نصف قطرية Pr ، ويوجد عندئذ عددان كميان k & n بدلا من عدد واحد كما فى نظرية بوهر ذات المسارات الدائرية.

واضح أنه يمكن وجود أكثر من مسار يختلف فى قيمة k ، ولكن له نفس العدد الكمى n ويصبح المسار دائريا عندما يكون $n = k$.

لم يستطع هذا التعديل فى نظرية بوهر من تفسير التركيب الدقيق fine structure لأطياف الذرات الثقيلة . ولذلك بدأ التفكير فى الميكانيكا الموجية .

فرض دى برولى De Broglie Hypothesis

أدخل دى برولى فكرة الطبيعة المزدوجة للمادة dual nature of matter

فرض أن :

١ – كل جسيم كمية حركته p ، يكون مصحوبا بموجة طولها λ ، حيث

$\lambda = \frac{h}{p}$, h هوثابت بلانك .

٢ - كلما وجدت موجة طولها λ فإن مربع سعة حركتها square of amplitude يتناسب مع احتمال وجود جسيم له كمية حركة $p = \frac{h}{\lambda}$.

وقد أمكن استخدام النظرية الموجية لإثبات هذا الفرض .

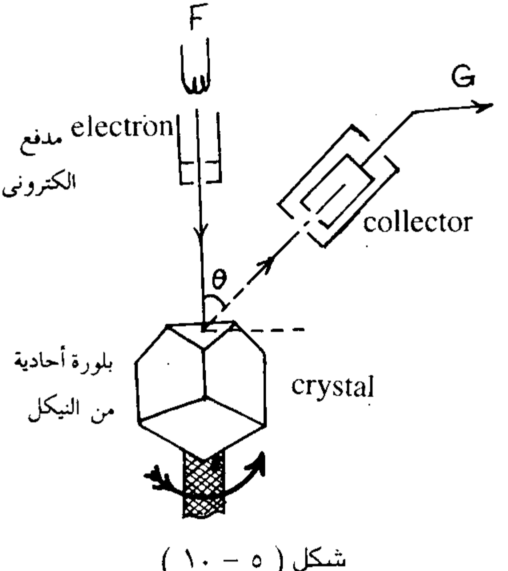
إيجاد طول موجة دى برولى عمليا : Davisson and Germer Expt.

تجربة دافيسون وجيرمر :

درس دافيسون وجرمر انعكاس الإلكترونات على بلورة أحادية من النيكل باستخدام الجهاز المبين بشكل (٥ - ١٠) .

ويتركب من مدفع إلكترونى ، يمكن الحصول منه على إلكترونات ذات سرع معينة ويمكن التحكم فى قيمتها .

تسقط حزمة الإلكترونات عموديا على المستوى (111) من سطح بلورة من النيكل ، فتشتت الإلكترونات فى جميع التجاهات .

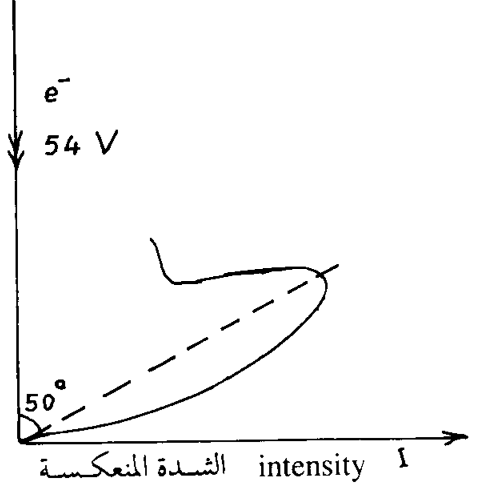


شكل (٥ - ١٠)

وباستخدام غرفة تأين collector يمكن قياس شدة تيار الإلكترونات المنعكسة فى الاتجاهات المختلفة حول البلورة . (ويمكن إدارة البلورة حول محور رأسى ينطبق مع اتجاه الأشعة الساقطة) .

وبدراسة تغير شدة التيار الإلكترونى المنعكس على البلورة مع الزاوية θ بين الشعاع الوارد والشعاع المنعكس الذى يدخل غرفة التأين ، شكل (٥ - ١١) وجد انعكاس كبير

بزاوية قدرها ٥٠° عندما كانت الإلكترونات تسقط خلال فرق في الجهد قدره ٥٤ فولط بالمدفع الإلكتروني .



شكل (٥ - ١١)

إذا كانت سرعة الإلكترون v وكتلته m .

∴ طاقة الإلكترون بسقوطه في فرق جهد V فولط داخل المدفع الإلكتروني هي :

$$1/2 \; m \; v^2 = e \, V$$

(e مقاسة بالكولوم)

$$\therefore \; mv = \sqrt{2 m \; e \; V}$$

كمية الحركة للإلكترون $\therefore \; p = m \; v$

وبتطبيق فرض دي برولي تكون الموجة المصاحبة للإلكترون هي :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{12.24}{\sqrt{V}} \; A^0$$

وفي حالتنا هذه عندما يكون $54 = V$ تكون :

$$\lambda_e = 1.67 \; A^0$$

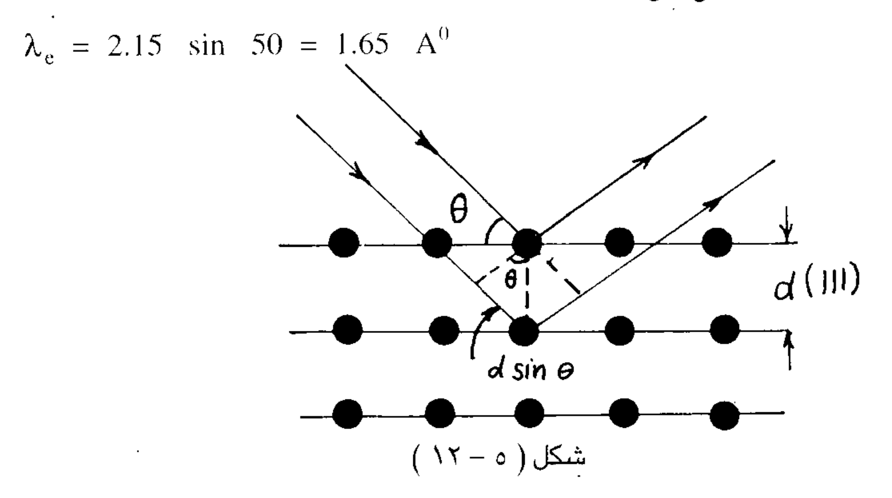
أما إذا اعتبرنا أن الإلكترونات الساقطة ما هي إلا موجات طولها λ فيمكن تطبيق قانون براج باعتبار أن البلورة تمثل محزوز حيود ، انظر شكل (٥ - ١٢)

حيث :

$$n \lambda_e = d \sin \theta$$

وبمعرفة أن (111) d للنيكل = 2.15 إنجستروم وأن 50 = θ بالتجربة فإن طول الموجة مقاسة بطريقة براج هى :

$$\lambda_e = 2.15 \sin 50 = 1.65 \ A^0$$



شكل (٥ – ١٢)

وواضح أن قيمة λ المقاسة بواسطة قانون براج ، أى باعتبار أن الإلكترونات هى أمواج تتفق إلى حد كبير مع طول الموجة كما تحدده معادلة دى برولى مما يحققها عمليا .

مشكلة الإثير : Ether

إذا اعتبرنا الجسيمات (الإلكترونات مثلا) أمواجا لها طول موجة معينة ، فما هو نوع الوسط الناقل لهذه الأمواج ؟

من المعروف أن سرعة الأمواج C ترتبط بكثافة الوسط d ومعامل المرونة الحجمى له B بالمعادلة $C = \sqrt{B / d}$

إذا تخيلنا وسطا ما تكون كثافته هى أقل كثافة معروفة لتكن (١٠ ^-٤^ جم / سم^٣^) ، ومعامل مرونته الحجمى أكبر معامل معروف لأى مادة (لتكن ١٠ ^١٢^ داين / سم^٢^ مثلا) فإن سرعة الأمواج فى هذا الوسط التخيلى هى :

$$C = \sqrt{10^{12} / 10^{-4}} = 10^8 \ cm / sec .$$

واضح أن هذه السرعة أقل بكثير من قيمة سرعة الضوء المعروفة . وهذا يدل علي أن

وجود مثل هذا الوسط ليس صحيحا .

∴ لا صحة لوجود أى وسط ناقل للأمواج الكهرومغناطيسية وبالرغم من ذلك فإننا سنحاول وضع معادلة موجية (أسوة بالمعادلات الموجية للصوت حيث يوجد وسط ناقل للموجة) يمكن بواسطتها وصف حركة تلك الأمواج المصاحبة للجسيمات ، حتى وإن كانت هذه الأمواج ليست أمواجا بالمعنى المفهوم .

فمثلا نعتبر أن الضوء عبارة عن جسيمات أو فوتونات طاقة كل منها hf فتتناسب شدة الضوء فى أى مكان مع كثافة الفوتونات (عدد الفوتونات فى وحدة الحجوم فى ذلك المكان) .

وتتناسب كثافة الفوتونات مع درجة احتمال وجود الفوتون .

أى إننا سنهمل وجود وسط يهتز أثناء انتقال الأمواج كما هو الحال فى الذبذبات الميكانيكية ، وبدلا من ذلك نعتبر ما سنسميه أمواج الاحتمال probability waves ، وكلما كانت سعة هذه الأمواج كبيرة كلما كان احتمال وجود الجسم كبيرا .

مبدأ عدم اليقين لهيزنبرج Uncertainty principle :

لا يمكن بالتجربة قياس أزواج من المتغيرات مع تحديد الدقة تحديدا لا نهائيا (غير محدود) .

مثلا : تحديد مكان جسيم وكمية حركته p_x & x

تحديد طاقة جسيم فى زمن معين E & t

تحديد كمية الحركة الزاوية مع الزاوية p_φ & ϕ

وينص المبدأ على أنه إذا كانت كمية الحركة تتحدد بالمدى Δp ، وكان موضع الجسيم بتحديد بالمقدار Δx فإن :

$$\Delta p \;.\; \Delta x \cong h$$

$$\Delta p \;.\; \Delta \phi \cong h$$

وبالمثل :

$$\Delta E \ . \ \Delta t \ \cong h$$

لتوضيح هذا المبدأ نفرض أننا نريد تحديد بدقة كبيرة موضع إلكترون نستخدم لذلك ميكروسكوب من نوع معين يسقط فوتونات على هذا الألكترون لتحديد مكانه . وكلما أردنا التحديد بدقة أكبر كلما وجب استخدام أطوال موجة أقصر لهذه الفوتونات أى إننا لنميز مسافات أبعادها ١٠ ^-٩^ سم يجب استخدام أشعة جاما في هذا الميكروسكوب .

لكى نرى الإلكترون يجب أن يرتد عليه فوتون واحد على الأقل داخل الميكروسكوب . يتصادم هذا الفوتون أصلا مع الإلكترون لكى يرتد وبذلك يعطيه دفعة تغير حتما من سرعته وبالتالى كمية حركته . وكلما أردنا المزيد من الدقة كان علينا استخدام فوتونات أكبر كتلة $\left(m = \frac{hf}{c^2}\right)$ وبذلك يزداد التغير فى كمية الحركة . أى أن زيادة الدقة فى تحديد المكان x كانت على حساب الدقة فى تحديد قيمة كمية الحركة p .

مسائل علي الباب الخامس

١ – جسيم ألفا طاقته 7.7 Mev يتجه نحو نواة ذرة رصـــاص (الوزن الذرى 82).
أوجد المسافة التى يصل إليها الجسم من النواة قبل ارتداده باعتبار النواة ثابتة .

٢ – أوجـــد طول مــوجــة نيــوترون طاقــتــه 10 M e v وكــتلةالنيــوترون
1.67×10^{-27} kg

٣ – أوجد طول الموجة المصاحبة لإلكترون اكتسب طاقته خلال سقوطه فى فرق جهد
قدره 20 V .

٤ – أثبت أن إلكترون الذرة يوجد خارج النواة وليس دخلها . اعتبر نصف قطر الذرة
$1\ °A$ ونصف قطر النواة 10^{-12} cm . الطاقـة القصـوى للإلكتـرون 2 M e V وكتلته
9.1×10^{-31} kg

٥ – ما هى طاقة حركة إلكترون فى أدنى مستوى للطاقة عند سقوطه فى بئر جهد
اتساعه 5×10^{-9} cm .

٦ – احسب مستويات الطاقة لجسيم كتلته 0.001 kg موجود فى بئر جهد مربع
اتساعه 10^{-2} cm .
ماذا يجب أن تكون قيمة m لكى تكون طاقة الحركة 1 Joul ؟ وما المسافة التى تفصل
مستويى الطاقة E_n & E_{n+1} ؟

٧ – ما هى زاوية السقوط لتى تسبب انعكاساً لنيوترونات طاقتها 0.025 e V عند

سقوطها على سطح بلورة تبعد مستوياتها الذرية عن بعضها $1.15\ {}^{\circ}A$ ؟ (كتلة النيوترون $1.67 \times 10^{-24}\ gm$)

٨ – ما هي درجة الدقة التى يمكن بها تحديد سرعة سيارة كتلتها $1.5 \times 10^{2}\ kg$ يتحدد موضع مركز الكتلة لها إلى $1\ {}^{\circ}A$

٩ – عمر الإثارة لنواة ذرة هو $5 \times 10^{-14}\ sec$ ما هو أقل خطا فى قياس طاقتها ؟

الباب السادس

معادلة شردونجر الزمنية : Time dependent Schrodinger equation

لإيجاد معادلة الأمواج المصاحبة لجسيم ما نبدأ أولا بمعادلة موجة توافقية مستوية plane harmonic matter wave طولها λ وتنتشر فى الاتجاه الموجب لـ x .

معادلة هذه الموجة هى :

$$\Psi = A \sin 2\pi \left(f t - \frac{x}{\lambda} \right) \qquad \ldots (1)$$

حيث Ψ هى الكمية التى تتذبذب . (وهى الإزاحة فى حالة الأمواج الميكانيكية) .

لكن من النظرية الكمية $E = h f$ ومن فرض دى برولى $\lambda = \frac{h}{p}$ ، حيث E طاقة الجسيم ، p كمية حركته .

وبالتعويض فى المعادلة الموجية نحصل على :

$$\therefore \ \Psi = A \sin \frac{2\pi}{h} (Et - p x)$$

إذا كانت V هى طاقة الموضع للجسيم تكون الطاقة الكلية له .

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \qquad \ldots (2)$$

بمفاضلة المعادلة (١) لإيجاد المعادلة التفاضلية لـ Ψ .

١ – بالنسبة إلى t :

$$\therefore \ \frac{d\Psi}{d t} = \frac{2\pi}{h} E A \cos \frac{2\pi}{h} (Et - px)$$

٢ – بالنسبة إلى x :

$$\frac{d\Psi}{d x} = - \frac{2\pi}{h} p A \cos \frac{2\pi}{h} (Et - px)$$

وبالمفاضلة مرة ثانية :

$$\therefore \quad \frac{d\Psi}{d\ t^2} = -\frac{4\pi^2}{h^2}\ E^2\ A\ \sin\frac{2\pi}{h}(Et - px)$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{h^2}\ p^2\ A\ \sin\frac{2\pi}{h}(Et - px)$$

ومن معادلة (2) $E = \frac{p^2}{2m} + V$ يمكن وضع المعادلة التفاضلية التى تعطى المعادلة الموجية على الصورة :

$$\frac{d\Psi}{dt} = a\frac{d^2\Psi}{dx^2} + bV\Psi \qquad \ldots\ldots (3)$$

حل هذه المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية ، والتى تصف الموجة يكون على الصورة :

$$\Psi = A\ \sin\frac{2\pi}{h}(Et - px) + B\ \cos\frac{2\pi}{h}(Et - px) \qquad \ldots (4)$$

حيث B & A ثوابت .

بمفاضلة المعادلة (4) وبالتعويض فى معادلة (3)

وبمساواة معاملات حدود الجيب وجيب التمام كل على حدة ، ولذلك لتتحقق المعادلة لجميع قيم t نحصل على :

$$-\frac{2\pi}{h}\ E\ B = -a\frac{4\pi^2}{h^2}\ p^2\ A + bVA$$

$$\frac{2\pi}{h}\ E\ A = -a\frac{4\pi^2}{h^2}\ p^2\ B + bVB$$

ومنها :

$$E = a\frac{2\pi}{h}\ \frac{A}{B}\ .\ p^2 - \frac{bh}{2\pi}\ \frac{A}{B}\ .\ V$$

$$E = -a\frac{2\pi}{h}\ \frac{B}{A}\ p^2 + \frac{bh}{2\pi}\ \frac{B}{A}\ .\ V$$

هذه المعادلات تنطبق على المعادلة (2) إذا كان :

$$a \frac{2\pi}{h} \frac{A}{B} = \frac{1}{2m} \quad ; \quad - \frac{bh}{2\pi} \frac{A}{B} = 1$$

$$- a \frac{2\pi}{h} \frac{B}{A} = \frac{1}{2m} \quad ; \quad \frac{bh}{2\pi} \frac{B}{A} = 1$$

بحذف a أو b نحصل على :

$$A^2 = - B^2$$

$$A = \pm i B$$

وباعتبار $A = - i B$ نجد أن

$$\therefore a = \frac{i h}{4 \pi m}$$

$$b = \frac{2\pi}{i h}$$

وتصبح المعادلة الموجية (3)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{ih}{4 \pi m} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{2\pi}{i h} V \Psi$$

$$\therefore - \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{h^2}{8 \pi^2 m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V \qquad \text{.... (5)}$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة شرودنجر الزمنية فى اتجاه واحد . وتجمع هذه المعادلة للأمواج المادية matter waves خصائص التدفق الحرارى heat flow فى الجوامد وخصائص أخرى تشابه انتشار الموجات الميكانيكية (الصوتية) فى الأوساط المرنة .

المعنى الطبيعى للدالة Ψ :

تمثل الدالة Ψ فى معادلة شرودنجر تلك الكمية التى تتذبذب فى الفراغ (الابعاد الثلاثة) وأيضا على مدى الأزمنة المختلفة . ويجب أن يتحقق ثلاثة شروط لهذه الدالة Ψ :

. لابد أن يكون التكامل محدودا (i) $\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 \, dx \, dy \, dz$

يجب أن تكون Ψ محدودة وأحادية القيمة (ii)

يجب أن تكون $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ ، $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ، $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ دوال متصلة (iii)

عندما نعالج تجربة تكون فيها الحالة الجسيمية للمادة هى الأساس ، كما هو الحال فى تجارب الاستطارة scattering ، يكون مربع القيمة المطلقة للدالة $|\Psi|^2$ متناسبا مع عدد الجسيمات التى تعبر وحدة المساحات العمودية على اتجاه حركتها فى الثانية الواحدة .

أما عندما نعالج مثل هذه المشاكل فى الضوء (البصريات) حيث تكون الطبيعة الموجية للفوتونات هى المطلوبة فإننا نعتبر شدة الضوء (عدد الفوتونات التى تعبر وحدة المساحات فى الثانية) متناسبة مع $|\Psi|^2$

الحالة العيارية : Normalization condition

مربع الدالة Ψ يعطى درجة احتمال وجود جسيم فى مكان معين فى لحظة معينة .

وتعرف كثافة الاحتمال probability density بالمقدار $|\Psi|^2$.

وبدهى أن الاحتمال الكلى لوجود جسيم ما هو الوحدة . أى أن :

$$\iiint |\Psi|^2 \, dx \, dy \, dz = 1$$

حيث يكون التكامل على جميع القيم الممكنة لـ x , y , z .

عندما تستوفى الدالة الموجية Ψ هذا الشرط يقال عنها : إنها حالة عيارية normalization condition .

الحالة العمودية : Orthogonality condition

عندما يتلاشى قيمة التكامل السابق ، أى أن :

$$\iiint |\Psi|^2 \, dx \, dy \, dz = 0$$

يكون الجسيم غير موجود على الإطلاق وتسمى الحالة عندئذ بالحالة العمودية orthogonal

معادلة شرودنجر الغير زمنية :

Time independent Schrodinger equation

عند معالجة الحالات الموقوفة أو الكمية Stationary or quatum states تمثل المعادلة الموجية والدالة Ψ حالة موجة موقوفة stationary wave يظهر فيها الزمن فى حد منفصل sperate factor أى أن :

$$\Psi = X(x, y, z) \cdot e^{-iwt}$$

$$= X(x, y, z) \cdot e^{-2\pi ift}$$

$$= X(x, y, z) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h} \cdot Et}$$

حيث $X(x, y, z)$ تمثل السعة الموجية وتتوقف على إحداثيات المكان فقط . بإجراء التفاضل جزئيا مرة بالنسبة للزمن ومرتين بالنسبة لإحداثيات المكان ، نحصل على :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h} E\, e^{-\frac{2\pi i}{h} Et} \cdot X$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = e^{-\frac{2\pi i}{h} Et} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \; ; \; \ldots\text{ etc } \ldots$$

بالتعويض فى معادلة شرودنجر الزمنية ذات البعد الواحد

$$\therefore\; E\, e^{-\frac{2\pi i}{h} Et} \cdot X = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} e^{-\frac{2\pi i}{h} Et} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + V\, e^{-\frac{2\pi i}{h} Et} X$$

$$\therefore\; \frac{d^2 \Psi}{dx} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V)\Psi = 0$$

هذه هي معادلة شرودنجر الغير زمنية للبعد الواحد . أمـا اذا استخدمنـا الأبعـاد الثلاثة x y z تصبح المعادلة :

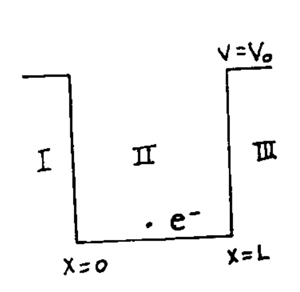
$$\nabla^2 X + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) X = 0$$

حيث $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ ويسمى لابلاس أوبريتور operator

وواضح من هذه المعادلة أنه إذا كانت $E > V$ تعطى المعادلة حلولاعلى شكل دالة الجيب ، أما إذا كانت $E < V$ فإن الدالة Ψ تكون على شكل دالة أسية .

الالكترون فى بئر جهد قائم : Electron in a square potential well

إذا اعتبرنا الكترون حر يتحرك فى الاتجاه الموجب لـ x بسرعة ثابتة تكون طاقة موضعه مساوية للصفر حيث لا تؤثر عليه أى قوى خارجية . أما إذا أثرت على الالكترون قوى تلزمه على الوجود والحركة فى المنطقة بين $x = 0$ & $x = L$ داخل بئر جهد [شكل (٦-١)] . فإن طاقة الوضع تكون كبيرة وعندئذ يقال أن الإلكترون ساقط فى بئر الجهد potential well ارتفاعه يساوى طاقة الموضع للإلكترون V_0



شكل (٦ - ١)

لحل معادلة شرودنجر فى هذه الحالة نفرض ثلاث مناطق I , II , III كما فى الشكل .

داخل المنطقة II يكون الجهد ثابتا . ولكن للتبسيط يمكن اعتبار بدء قياس الجهد ، أى نقطة الأصل ، عند هذا الجهد الإلكترونى .

∴ يكون جهد الإلكترون اعتباريا يساوى صفراً ويكون الجهد عند قمة البئر مساويا لجهد الإلكترون (يجب أن يساوى الجهد هنا بالقياس المطلق صفرا حيث إن الإلكترون يكون حرا تماما ، ولا يرتبط إطلاقا بالقوى الجاذبة) .

وبهذه الطريقة نضع فى معادلة شرودنجر لهذا الإلكترون $V = 0$ فتصبح :

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{8 \pi^2 m E}{h^2} \Psi = 0$$

ولهذه المعادلة الحل العام الآتى :

$$\Psi = A \sin \omega x + B \cos \omega x \quad \ldots (1)$$

حيث A & B ثوابت ،

$$\omega^2 = \frac{8 \pi^2 m E}{h^2}$$

داخل المنطقـة III , I يكون الجـهـد V_0 أكبر كثرا من E خـاصـة فى حـالة الآبار العميقـة ، لذلك توضـع معادلة شرودنجر على الصورة :

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \frac{8 \pi^2 m}{h^2} (V_0 - E) \Psi = 0$$

الحل العام للمعادلة يعطى دوال أسية :

$$\therefore \Psi = C e^{-\omega' x} + D e^{\omega' x}$$

حيث D & C ثوابت ،

$$\omega'^2 = \frac{8 \pi^2 m (v_0 - E)}{h^2}$$

لكن من أحد شروط الدالة Ψ أن تكون دائما محدودة ، لذلك فبالنسبة للمنطقة I عندما تؤول x إلى ∞ - فان الحد $C e^{-\omega' x}$ يؤول إلى مـالا نهاية ، وهذا طبـعا غـير جـائز ، لذلك يجب أن يتلاشى الثابت $\therefore C = 0$

وتكون المعادلة الموجية فى المنطقة I هى :

$$\Psi = D e^{w' x} \quad .. (2)$$

وبالمثل فى المنطقة III عندما تؤول $x \longrightarrow \infty$ فإن الحد $D e^{w' x}$ يتلاشى فقط إذا تلاشـت (D) أى أن $D = 0$ ، فى هذه الحـالة تكون مـعـادلة الموجة فى المنطقة III هى :

$$\Psi = C e^{-w' X} \quad .. (3)$$

أيضا من شروط الدالة Ψ أن تكون متصلة وكذلك $\frac{d \Psi}{d x}$

∴ عند حدود بئر الجهد X = L أو X = 0 وباستعمال معادلة (1)

$$\therefore \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{x=L} = A\,\omega \cos \omega L - B\,\omega \sin \omega L \qquad ..\ (4)$$

أما إذا استخدمنا المعادلة (3) للحصول على نفس المقدار :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{x=L} = -\,\omega^{\backslash}\, C\, e^{-\omega L} = -\,\omega^{\backslash}\, \Psi \qquad ..\ (5)$$

يجب أن تكون المعادلتان السابقتان (4) ، (5) متطابقتين

إذ أنهما يمثلان نفس القيمة . ولكن إذا ألت V_0 إلى ∞ فإن المعادلة (4) لا تتغير حيث إن قيمة V_0 لا تظهر فى ω ، بينما باستخدام المعادلة (5) نجد أن :

$$\left(\frac{\delta \Psi}{\delta x}\right)_{x=L} \longrightarrow \infty$$

تؤول إلى مالا نهاية ما لم تؤول Ψ إلى الصفر . حيث إن :

$$\omega^{\backslash} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

$$V_0 \longrightarrow \infty \qquad \omega^{\backslash} \longrightarrow \infty$$

ونتيجة لذلك فإن قيمة Ψ عند $x = 0$ أو عند $x = L$ تقترب من الصفر كلما ازدادت قربا قيمة V_0 من مالا نهاية ويكون تغير الدالة Ψ داخل بئر الجهد خاضعا لدالة الجيب ، شكل (٦ – ٢)

قيم الطاقة Eigen values :

يمكن إيجاد مستويات الطاقة فى بئر جهد لا نهائى العمق للإلكترون ($V_0 = \infty$) باستخدام المعادلة (1) والتعويض فيها بشروط الحدود . boundary conditions .

عند $x = 0$ ، $x = L$ تكون $\Psi = 0$

$$\therefore\ B = 0 \quad , \quad \sin \omega L = 0$$

$$\Psi = A \sin \omega x + B \cos \omega x$$

$$\text{at } x = 0 \qquad \therefore\ 0 = B$$

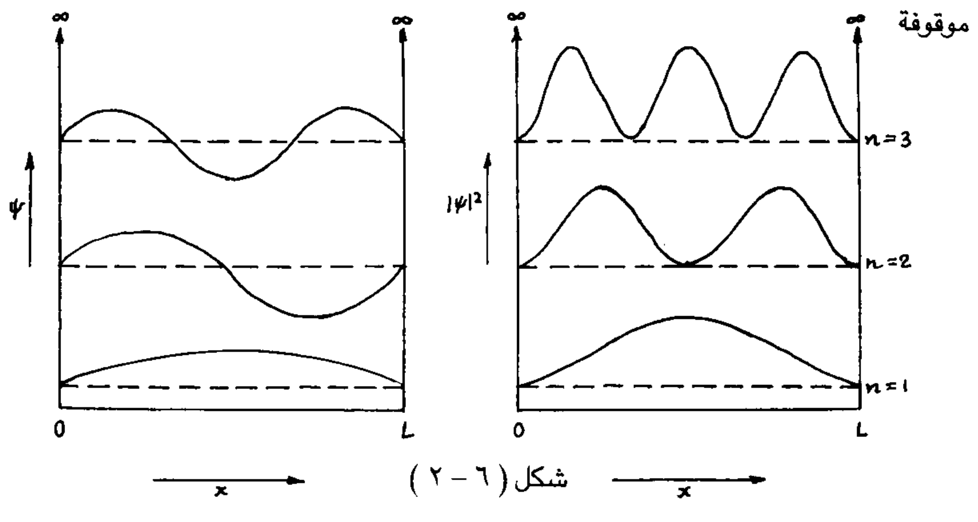
$$\text{at } x = L \quad 0 = A \sin \omega L + o$$

$$\therefore\ \omega L = n\pi$$

$$\therefore\ \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \omega^2 = \frac{8\pi^2 m E}{h^2}$$

$$\therefore\ E_n = \frac{n^2 h^2}{8 m L^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

حيث n هو العدد الكمى وتعطى هذه المعادلة مستويات الطاقة للإلكترون فى حالته الموقوفة . ووجود الاعداد الكمية ومستويات الطاقة المتفرقة discrete energy levels يميز دائما حل جميع حالات الجسيمات التى يحددها حيز محدود من الفراغ حيث تكون موجتها المصاحبة موقوفة



شكل (٦ - ٢)

ظاهرة الأنفاق Tunnel effect

عندما تكون طاقة الموضع للإلكترون V_0 صغيرة أى أنه عندما يكون عمق بئر الجهد صغيرا نجد أننا إذا استخدمنا شروط الحدود boundary conditions لإيجاد الدالة الموجية Ψ هناك فإن قيمتها لا تتلاشى بل توجد قيم لـ Ψ داخل كل من المنطقتين I & III تقل حسب دالة أسية ، كلما ازدادت x سواء فى الاتجاه الموجب أو السالب ،

ولما كان لـ Ψ قيمة حقيقية داخل حاجزى الجهد Potential barrier III & I ، لذلك تكون لـ $|\Psi|^2$ قيمة حقيقية . أي احتمال حقيقى لوجود الإلكترون خارج بئر الجهد ، وهذا هو الجديد فى الموضوع فالنظرية الكلاسيكية لا تدع أى احتمال لوجود الجسيم خارج بئر الجهد ، بينما ثبت بواسطة الميكانيكا الموجية وجود احتمال لأن يخترق الجسيم حاجز بئر الجهد ويتواجد فى المنطقة المحرمة كلاسيكيا ، وتسمى هذه الظاهرة بظاهرة الانفاق Tunnel effect .

انظر شكل (٦ - ٣)

شكل (٦-٣)

وتزداد هذه الظاهرة وضوحا كلما نقصت قيمة V_0 يمكن إذا للإلكترونات أن تخترق حاجزا سمكه ($x_1 - x_0$) وتعرف درجة احتمال النفاذ trsmission probability بأنها النسبة بين $|\Psi|^2$ مقدرة عند x_1 إلى $|\Psi|^2$ مقدرة عند البعد x_0 ، وتستخدم ظاهرة الانفاق فى الانبعاث المجالى للإلكترونات من الجوامد Field - ion microscope فى ميكروسكوب الانبعاث الأيونى المجالى .

مسائل وتمارين على الباب السادس

١ – أثبت أن $\cos 2\pi\,(px/h)$ هو حل لمعادلة شرودنجر فى بعد واحد .

٢ – احسب احتمال الأنفاق tunneling probability لإلكترون فى بئر جهد حيث $(V_0 - E) = 1\ ev$ واتساع حاجز الجهد $1\ °A$ وقارن بين هذه القيمة والقيمة المناظرة لإلكترون ساقط فى بئر عمقه 10 ev واتساع حاجز جهده $10\ °A$.

٣ – جسم صغير كتلته 1 mg يتحرك بين حائطين المسافة بينهما 1 cm أوجد أقل سرعة للجسم .

٤ – يسقط إلكترون طاقته 30 ev على حائل (بئر جهد) مربع ارتفاعه 40 ev ،. ما •احتمال نفاذ tunnel probability الإلكترون فى الحاجز إذا كان سمكه L يساوى 0.1 n m ، 1 n m .

الحل :

$$U - E = 10\ ev = 1.6 \times 10^{-18}\ J$$

احتمال الأنفاق فى الحاجز هو

$$T = e^{-2KL}$$

حيث

$$K = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{(h/2\pi)}$$

وبالتعويض نجد أن الاحتمال يزداد من القيمة 8.49×10^{-15} إلى القيمة 0.0392 عندما يقل سمك الحاجز من 1 إلى 0.1 نانومتر .

٥ – استخدم نموذج جسم ساقط فى بئر جهد لحساب مستويات الطاقة لنيوترون موجود بنواة قطرها 2×10^{-5} n m .

هل الفروق بين مستويات الطاقة حقيقية ؟ .

٦ – الدالة الموجية Ψ لجسيم يتحرك فى بئر جهد ذى بعد واحد هى :

$$\Psi (x) = A \sin (n \pi x / L)$$

استخدم الحالة العيارية normalization condition لإثبات أن الثابت A يعطى بالمعادلة : $A = \sqrt{2/L}$

الحل : $\int_0^L |\Psi|^2 \, dx = 1$ normalization condition

ثم أجرى التكامل .

٧ – متذبذب توافقى ذى بعد واحد دالته الموجية هى :

$$\Psi = A \times e^{-bx^2}$$

أثبت أن Ψ تحقق معادلة شرودنجر ثم أوجد الطاقة الكلية E وهل هذه هى الطاقة الأرضية أم طاقة أول مستوى إثارة ؟ .

٨ – جسيم كتلته m_0 موجود فى بئر جهد اتساعه L . إذا كان اتساع البئر صغيرا فإن الحركة تصير نسبوية وتصبح الطاقة $E = p^2 / 2 m_0$ غير حقيقية .

أ – أوجد قيم مستويات الطاقة للجسيم فى هذه الحالة .

ب – وإذا كانت $L = 10^{-12}$ m أوجد أقل طاقة حركة .

جـ – ما هى نسبة الاختلاف فى الطاقة إذا استخدمنا معادلة الطاقة اللانسبوية ؟

٩ – اشرح نظرية الأنفاق ، وبين كيف تستخدم لتفسير ظاهرة الإنبعاث الإلكترونى من الأقطاب الباردة ، كما فى ميكروسكوب المجال الأيونى ؟

١٠ - إذا كان ثابت القوة فى حركة توافقية بسيطة هو 0.1 J / m . اوجد التردد ، علماً بأن الكتلة المتذبذبة 1 kg . ماذا يكون العدد الكمى فى هذه الحالة إذا كانت الطاقة الكلية هى 0.1 J ؟ . وماذا يكون الفرق بين مستويى الطاقة $(E_{n+1} - E_n)$

١١ - يسقط الكترون طاقته 5 ev على حاجز جهد ارتفاعه 6 ev وأتساعه 5 °A . أوجد درجة احتمال النفاذ فى هذا الحاجز .

١٢ - احسب الفرق بين مستويى الطاقة الأول والأرضى للإلكترون فى بئر جهد لا نهائى الارتفاع اتساعه

(١) 5 °A (٢) 1 cm

ماذا يكون طول الموجة المصاحبة لعملية الانتقال من المستوى الأول للمستوى الأرضى فى كل حالة ؟



الباب السابع

ذرة الإلكترون الواحد

يتحرك الإلكترون فى ذرة الأيدروجين حول النواة فى مجال قوة كهربائى F

$$F = -\frac{Z e^2}{r^2} \quad (Z = 1 \text{ for } H_2)$$

إذا كان V هو جهد الإلكترون

$$\therefore F = -\frac{dV}{dr}$$

$$\because dV = -F\,dr = \frac{e^2}{r^2}\,dr$$

$$\therefore V = -\frac{e^2}{r}$$

حيث r هو بعد الإلكترون عن النواة (ويساوى بالإحداثيات المتعامدة $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ وتصبح معادلة شرودنجر لإلكترون ذرة الأيدروجين :

$$\nabla^2 \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + e^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\right)\Psi = 0$$

يعطى حل هذه المعادلة قيمة الدالة الموجية Ψ بدلالة x, y, z فى أى مكان حول النواة . يكون احتمال وجود الإلكترون كبيرا كلما زادت قيمة $I \Psi I^2$

ويستخدم عادة لحل المعادلة السابقة الإحداثيات القطبية الكرية $r\ \varphi\ \theta$ Spherical polar coordinates المبينه شكل (٧ - ١) حيث :

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

وباستخدام الاحداثيات x, y, z بالاحداثيات القطبية $r\ \varphi\ \theta$ فى معادلة شرودنجر نجدها قد انفصلت الى ثلاثة معادلات تفاضلية معتادة : —

$$\left|\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right) - \frac{\lambda}{r^2}\right| R = 0 \qquad \ldots\ldots\ (a)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2} + \cot\frac{d}{d\theta} + \lambda - \frac{m_\ell^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \qquad \text{....... (b)}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + m_\ell^2\right]\varphi = 0 \qquad \text{....... (c)}$$

z

P

r

z = r cos θ

θ

y

φ

r sin θ

x = r sin θ cos φ

y = r sinθ sin φ

x

شكل (٧ - ١)

حيث λ يسمى Separation parameter عامل الانفصال وحيث الدوال $R \; \Theta \; \varphi$ تبين تغير الدالة الموجية في هذه الاتجاهات $r \; \theta \; \phi$

أولا : حل المعادلة الثالثة (c) سهل ويعطى دالة جيب أو جيب تمام أى :

$$\varphi = e^{i m_l^2} . \phi$$

ويجب أن يكون m_ℓ صحيحا integer وإلا كانت الدالة الموجية φ متعددة القيمة .

ويسمى m_ℓ **بالعدد الكمى المغناطيسى** .

ثانيا : قيم المتغير λ التى لا تعطى حلولا للمعادلة (b) بحيث تكون الدالة الموجية Θ محدودة ومتصلة وأحادية القيمة هى :

$$\lambda = l(l+1)$$

ويكون بذلك عدد المعاملات التى لا تتوقف على بعضها هى $(2\ell+1)$

وهذه تناظر القيم المقبولة من العدد الكمى المغناطيسى m_ℓ

ثالثا : حل المعادلة الأولى (a) يشبه حل بئر الجهد القائم .

أى إننا لا نجد قيما مقبولة للدالة الموجية إلا إذا خضعت طاقة الإلكترون E للمعادلة :

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad n = 1,2,3, \ldots..$$

وهذه هى نفس معادلة الطاقة التى تحصل عليها بوهر من نظريته الخاصه بالمسارات الإلكترونية .

أى أن الميكانيكا الموجية أعطت نفس مستويات الطاقة الإلكترونية ، ولكن لم يعد العدد الكمى النصف قطرى n , radial q.N ، يصف مسار معينا ، ولكنه يعبر عن كثافة الاحتمال (الاحتمال لوحدة الحجوم) لوجود الإلكترونات على أبعاد مختلفة من النواة .

الدالة الموجية للهيدروجين :

يمكن كتابة الدالة الموجية للهيدروجين التى تصف حالته الأولى

$$\Psi_{1st}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

حيث a_o هو نصف قطر بوهر ويعطى بالمعادلة

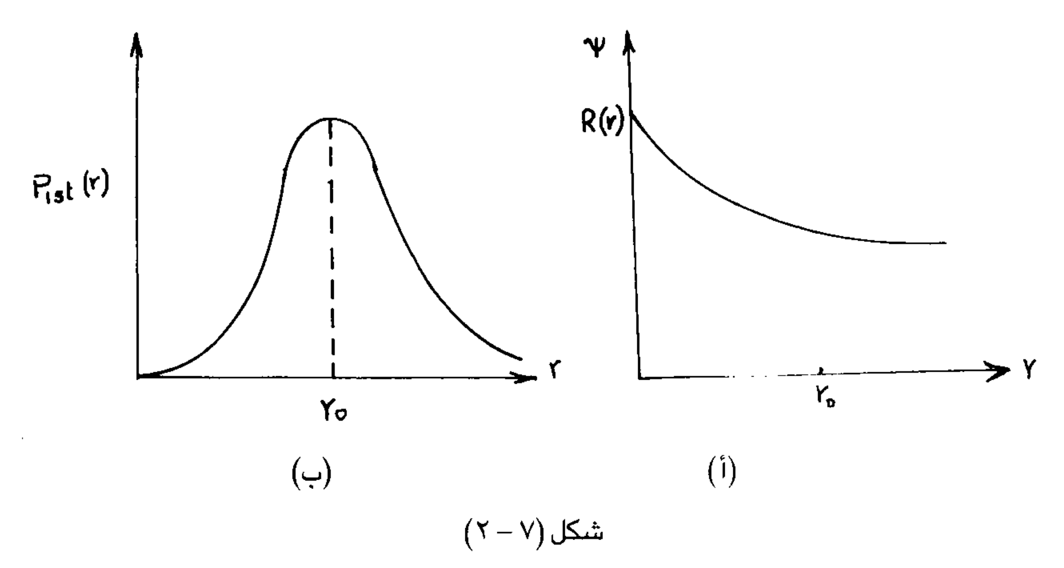
$$a_0 = \frac{(h/2\pi)^2}{mke^2} = 0.0529 \ \text{n m}$$

وفى هذه المعادلة k هو ثابت كولوم ويساوى :

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$$

ويلاحظ أن الدالة الموجية $\Psi_{1st}(r)$ تتناقص مع r وتقترب قيمتها من الصفر عند البعد $r = \infty$ كما مبين بشكل (٧ –٢أ) .

وتعرف كثافة الاحتمال Probability density بأنها الاحتمال لوحدة الحجوم لوجود الإلكترون فى أى مكان ، وتساوى مربع الدالة الموجية (normalized) أى $|\Psi_{1st}|^2$ ،



شكل (٧ – ٢)

وعلى ذلك تكون كثافة الاحتمال لوجود الإلكترون في المستوى الأول 1s state هو

$$|\Psi_{1\,st}|^2 = \left(\frac{1}{\pi a_0^3}\right) e^{-2r/a_0}$$

إذا اعتبرنا الحجم dV تكون كثافة الاحتمال لوجود الإلكترون فيه هو .

$$P(r)\,dr = |\Psi|^2 dV = |\Psi|^2\, 4\pi r^2\, dr$$

وذلك باعتبار قشرة حول النواة تبعد مسافة r من المركز وسمكها dr أى أن كثافة الإحتمل فى اتجاه نصف القطر r هى :

$$P(r) = 4\pi r^2 \,.\, |\Psi|^2$$

وبالتعويض بدلا عن $|\Psi|^2$ نحصل على كثافة الاحتمال النصف قطرى لذرة الهيدروجين فى حالتها الأرضية

$$P_{1\,st}(r) = \left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right) e^{-2r/a_0}$$

ويبين الشكل (٧ – ٢ ب) تغير $P_{1\,st}(r)$ مع r وقمة المنحنى تبين أكبر احتمال

للبعد r عند حالة معينة .

مثال : أوجد احتمال وجود الإلكترون خارج المسار الأول لبوهر فى ذرة الهيدروجين فى حالتها الأرضية .

الحل : نوجد الاحتمال بإجراء تكامل لكثافة الاحتمال $P_{1\,st}\,(r)$ ابتداء من نصف قطر بوهر a_0 وحتى مالانهاية .

$$P = \int_{a_0}^{\infty} P_{1\,st}\,(r)\,dr = \frac{4}{a_0^3}\int_{a_0}^{\infty} r^2\, e^{-2r/a_0}\,dr$$

وبتغير المتغير r ووضع بدلا منه $x = \frac{2r}{a_0}$ يكون $dr = \left(\frac{a_0}{2}\right) d\,x$ مع مراعاة أن

$x = 2$ عند $r = a_0$

$$\therefore\; P = \frac{1}{2}\int_{2}^{\infty} x^2\, e^{-x}\,dx = -\,\frac{1}{2}\,(x^2 + 2x + 2)e^{-x}\,\Big|_{2}^{\infty}$$

$$\therefore\;\; P = 5\, e^{-2} = 0.677$$

أى أن درجة احتمال وجود الإلكترون خارج المدار الأول هى ٧و ٦٧ ٪ .

الدالة الموجية للمستويات الأعلى من المستوى الأرضى

لكل قيمة من قيم n أى لكل حل من المعادلة (a) يوجد حل أو أكثر للمعادلة (b) وتوصف هذه الحلول بعدد كمى آخر ℓ يأخذ القيم

$$\ell \;=\; 0\;,\;1\;,\;2,\;......\;,\;(n-1)\;.$$

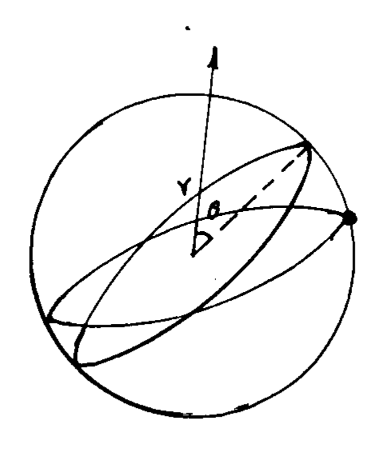
ويعين هذا العدد مدى تغير الدالة الموجية φ مع الزاوية Θ عند ثبوت r . فكلما كبرت قيمة ℓ تتغير قيمة φ بسرعة مع الزاوية θ ولذلك فإن احتمال وجود الإلكترون بالقرب من النواة يكون قليلا.

وبالمثل وجد أنه لكل قيمة من قيم ℓ أى لكل حل من حلول المعادلة يوجد حل أو أكثر للمعادلة c . وتعطى هذه الحلول المختلفة بعدد كمى آخر m_ℓ يمكن أن تأخذ القيم :

$m_\ell = -\ell , -(\ell - 1) , -(\ell - 2) , ... , 1 , 0,1, ... , \ell$

وتصف الدالة الموجية φ كيفية تغير الدالة الموجية الكلية بتغير الزاوية ϕ

∴ يمكن وصف الحالة الكمية quantum state للاكترون فى الذرة بثلاثة أعداد كمية n , ℓ , m_ℓ ويكون بذلك قد تحدد تماما تغير الدالة الموجية الكلية من نقطة إلى أخرى فى الفراغ .



شكل (٧ - ٣)

التعبير الطيفى spectroscopic notation :

تسمى الحالات الإلكترونية المقابلة للأعداد الكمية :

$$\ell = 0 , 1 , 2 , 3$$

بالمستويات s , p ,d , f على الترتيب .

فمثلا :

$n = 1 ; \ell = 0$ تكافئ 1 s

$n = 3 ; \ell = 2$ تكافئ 3 d

وهكذا

المعنى الطبيعى للأعداد الكمية n , ℓ , m_ℓ :

١ - يحدد العدد الكمى n مستوى الطاقة كما فى معادلة بوهر :

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2} \qquad n = 0, 1,2 ,3 , ...$$

وتغيير ℓ , m_ℓ عند ثبوت قيمة n لا يغير من مستوى طاقة المجموعة ، وإن كان يسبب تحلل المستوى Degeneracy :

٢ - يحدد العدد الكمى المدارى لكمية الحركة الزاوية ℓ orbital angular - momentum quantum number

كمية الحركة الزاوية L لحركة الجسيم حول المركز الجاذب . حيث

$$L = \ell \frac{h}{2\pi}$$

وتأخذ ℓ القيم من 0 إلى (n - 1) .

٣ – يرتبط العدد الكمى المغناطيسى m_ℓ بمركبة متجه كمية الحركة الزاوية L على المحور الرأسى z

∴ مركبة L على الرأسى هى :

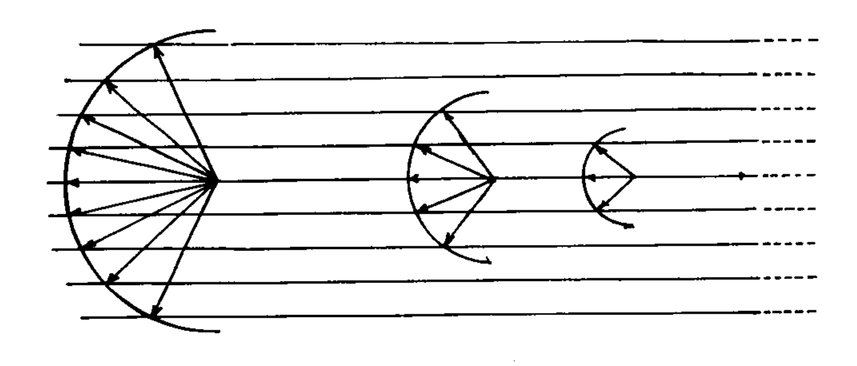
$$L_Z = m_\ell \cdot \frac{h}{2\pi}$$

اتجاه متجه كمية الحركة الزاوية :

من حل معادلة سرودنجر نجد أنه عندما تكون قيمة $\ell = 1$ يمكن لمتجه كمية الحركة الزاوية L أن يأخذ ثلاثة أوضاع فى الفراغ تكون مركباتها على محور z هى :

$$+\frac{h}{2\pi} \quad , o , \quad -\frac{h}{2\pi}$$

انظر الشكل (٧ –٤) .



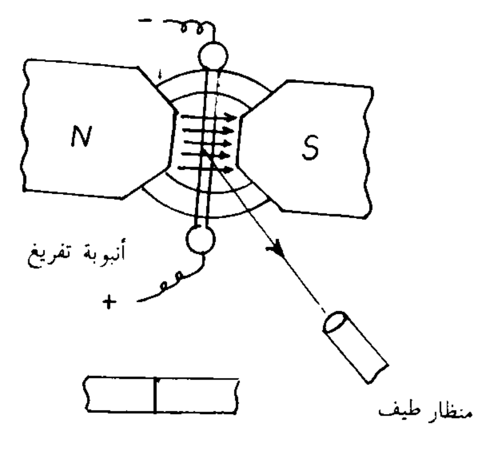
شكل (٧ – ٤)

أى أن $m_\ell = +1 , 0 , -1$.

وهذا يعنى أن لكل ℓ يوجد $(2\ell + 1)$ طريقة لوضع المتجه L فى الفراغ وهذا يعنى أن هناك أوضاعاً معينة فقط فى الفراغ يمكن أن يأخذها وهذه الأوضاع هى فقط التى يكون فيها مسقط L على الرأسى z عددا صحيحا 0 ؛ 1 ± ؛ 2 ± .....

ويسمى ذلك التحديد بكمية الفراغ Space quantization ، وذلك لأن ليس كل اتجاه فى الفراغ ممكنا للمتجه L .

وإثبات مبدأ كمية الفراغ نحصل عليه بدراسة تأثير المجال المغناطيسى على خطوط الطيف كما فى تأثير زيمان Zeeman's effect



شكل (٧ – ٥)

وضع زيمان أنبوبة تفريغ كهربائى فى مجال مغناطيسى وفحص الضوء بواسطة مطياف له قوة تفريق كبير شكل (٧ – ٥) وجد أن خطوط الطيف قد انقسمت إلى عدة خطوط متقاربة كما وجد أن مقدار الانشطار magnitude of splititting يتوقف على شدة المجال المغناطيسى .

ولتفسير ظاهرة زيمان Zeeman effect :

نفرض إلكترون سرعته v يتحرك فى مسار نصف قطره r ، ويعمل عدد من الدورات فى الثانية = $\frac{v}{2 \pi r}$ هذه الحركة تكافئ تيارا كهربائيا I يمر فى اتجاه مسار الإلكترون .

$$\therefore I = \frac{-e\,v}{2\pi r c} = \frac{-e}{c\,T} \qquad \left(\frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{T} \right)$$

فيتكون مجال مغنطيسى عمودى على مستوى المسار .

ويمكننا اعتبار وجود مغنطيسى محوره عمودى على مستوى المسار عزمه المغنطيسى

$M_\ell = IA$ و يعطى نفس التأثير . من شكل (٧ - ٦)

تكون مساحة المسار A تساوى :

شكل (٧ - ٦)

$$A = \int_0^{2\pi} 1/2\, r^2\, d\Theta = \int_0^T 1/2\, r^2\, \frac{d\Theta}{dt}\, dt$$

حيث T هو زمن الدورة فى المسار .

ولكن كمية الحركة الزاوية m v r تخضع للمدأ الكمى . أى أن :

$$m\,v\,r = m\,r^2\,\Theta = \ell \frac{h}{2\pi}$$

∴ تكون مساحة المسار :

$$A = \int_0^T \frac{\ell h}{4\pi m}\, dt = \frac{\ell h}{4\pi m} . T .$$

ويكون العزم المغناطيسى المصاحب لحركة الإلكترون

$$\overline{M_\ell} = -\frac{e}{c.T} \cdot \frac{\ell h}{4\pi m} .T$$

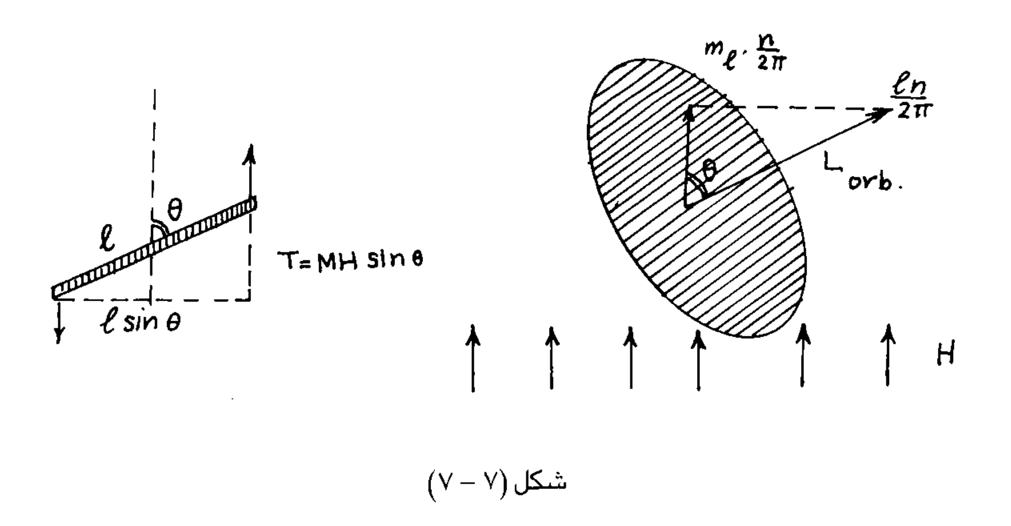
$$\therefore \overrightarrow{M_\ell} = \frac{-e h}{4\pi m c} . \ell = -B.\vec{\ell}$$

حيث B هو بوهر ماجنتون Bohr magneton ، ويساوى العزم المغنطيسى الناتج عن إلكترون يدور فى المسار الأول لذرة الأيدروجين .(وهو وحدة العزم المغنطيسى) كمية حركته الزاوية هى $\frac{h}{2\pi}$. $(B = 9.27 \times 10^{-24} \text{ amp} / m^2)$

ولما كان $\overrightarrow{M_\ell}$ كمية متجهة عمودية على مستوى المسار ، ولما كانت $\vec{B}$ مقداراً ثابتاً لذلك يجب أن يكون ℓ كمية متجهة .

طاقة الموضع المغنطيسية :

عند التأثير بمجال مغناطيسى خارجى يدور مستوى الملف ، وتتوقف طاقة الموضع المغنطيسية على مقدار الميل θ بين اتجاه المجال المغنطيسى والعمودى على مستوى الملف.



شكل (٧ - ٧)

إذا كان T هو الأزدواج المؤثر على المغنطيس الجزيئى عندما تؤثر بمجال مغنطيسى H

يكون :

$$T = MH \sin\theta$$

حيث θ هى زاوية الميل مع اتجاه المجال : شكل (٧ – ٧)

إذا حركنا المغنطيس زاوية صغيرة θ يتغير الجهد المغنطيسى بمقدار :

$$dV = T\, d\Theta$$

وبفرض أننا بدأنا التأثير بالمجال عندما كان محور المغنطيسى الجزيئى متعامدا مع المجال (أى أن مستوى المسار للإلكترون فى اتجاه المجال) يكون الجهد المغنطيسى لإدارة محور المغنطيس ليصنع زاوية θ مع المجال

$$V = \int_{1/2\pi}^{\Theta} T\, d\Theta$$

$$= \int_{1/2\pi}^{\theta} MH \sin\theta\, d\theta = -MH\cos\theta$$

ولكن

$$\cos\theta = m_{\ell} \cdot \frac{h}{2\pi} L\,(orb.)$$

$$\therefore V = -MH\, m_{\ell} \frac{h}{2\pi} L\,(orb.)$$

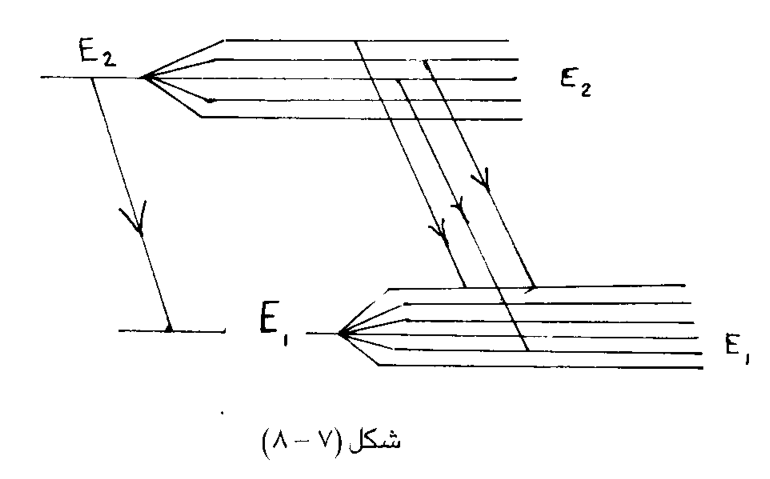
$$= +\frac{eh}{4\pi mc} \cdot H \cdot m_{\ell}$$

$$V = B \cdot m_{\ell} \cdot H$$

حيث B هو بوهر ماجنتون ، m_{ℓ} هو العدد الكمى المغناطيسى ، ولما كانت قيم m_{ℓ} أعداداً صحيحة فقط ، يكون التغير فى الجهد المغنطيسى على مراحل ، ولا يكون التغير متصلا .

وينتج عن ذلك ما يأتى :

عند التأثير بمجال مغناطيسى خارجى على الإلكترون فى ذرة ما فإن كل مستوى من مستويات الطاقة يتحلل degenerates إلى عدد من المستويات شكل (٧ - ٨) ، مما يتسبب عنها ظهور عدة خطوط طيفية مكان الخط الواحد الذى كان يميز مستوى الطاقة $E_2 - E_1 = hf$ قبل إدخال المجال المغنطيسى .



شكل (٧ - ٨)

وبالرغم من أن هذه النظرية قد فسرت عددا من خطوط الطيف الدقيقة إلا أنها عجزت عن تفسير الجميع ، ولذلك بدأ التفكير فى حركة الإلكترون مغزليا بالإضافة لحركته المدارية .

حركة الإلكترون مغزليا Electron spin (لف الإلكترون)

حسب النظرية الكلاسيكية للكهرومغنطيسية ، إذا أديرت كرة عليها شحنة منتظمة فى حركة مغزلية يكون لها عزم مغنطيسى ، إذ يمكن اعتبارها كأنها مغطاة بتيارات كهربائية ، ويكون لها أيضا كمية حركة زاوية بسبب كمية حركة المجال الكهرمغنطيسى المحيط بها .

وعلى هذا الأساس فرض أو هلنبك وجود حركة مغزلية للالكترونات ، أما موازية أو عكس موازية للمجال المغنطيسى . parallel or anti parallel

ويمكن اثبات أن كمية الحركة الزاوية المصاحبة للحركة المغزلية هى :

$$P_s = S \cdot \frac{h}{2\pi}$$

حيث S هو العدد الكمى المغزلى ، ويساوى $\pm 1/2$ ويكون العزم المغناطيسى المصاحب هو :

$$\frac{eh}{2\pi mc} \cdot S$$

وبإدخال العدد الكمى المغزلى تكون حالة الإلكترون قد عينت تماما بأربعة أعداد كمية هى n , ℓ , m_ℓ , S

تحقيق وجود الحركة المغزلية للإلكترون عمليا :

تجربة شتيرن وجيرلاخ Stern & Gerlach

تمرر حزمة من ذرات الفضة المتعادلة ذات الطاقة الواحدة بين قطبى مغنطيسى قوى مفرق « diverging » غير منتظم ، شكل (٧ – ٩)

شكل (٧ – ٩)

و قد صممت الأقطاب بحيث تحرف الذرات التى تحتوى على عزم مغنطيسى .

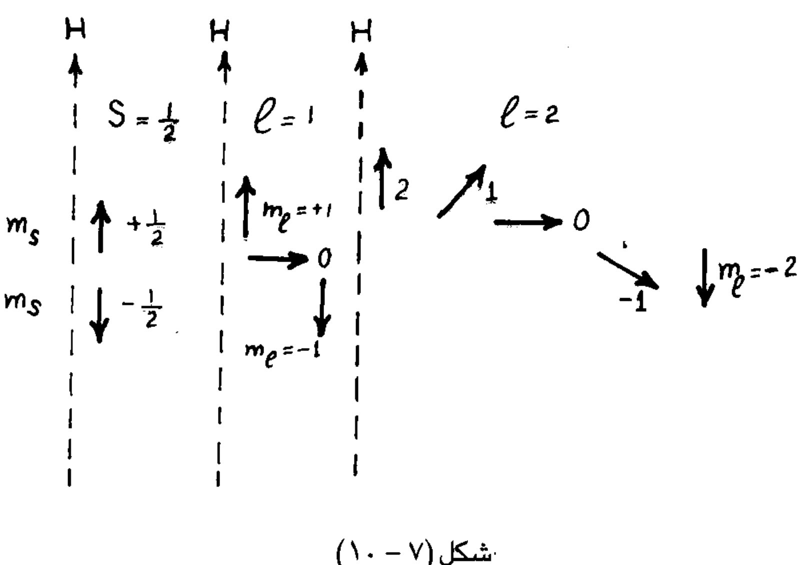
وقد وجد أن عدد من هذه الذرات قد انحرف إلى أعلى ، بينما انحراف الباقى إلى أسفل ، وظهر الشعاع على حاجز الوميض وكأنه اثنان منفصلان كما وجد أن الإزاحة

لأعلى تساوى تماما الازاحة لأسفل .

ولما كانت ذرات الفضة هنا متعادلة ، فإن هذا الانحراف قد نشأ عن الإلكترون الوحيد في المسار الخارجى . single - valence electron ، فالتجربة تثبت أن تركيب هذه الإلكترونات ليست واحدة ، بدليل الاختلاف فى اتجاه الانحراف .

وبذلك يؤثر المجال المفرق على الإلكترونات بقوة تعتمد فى اتجاهها على اتجاه الحركة المغزلية للإلكترون ، وبالتالى فهو ينحرف إما إلى أعلى أو إلى أسفل .

وقد أمكن إثبات بالتجربة أن مركبة الحركة الزاوية المغزلية للإلكترون فى اتجاه المجال هى :



شكل (٧ - ١٠)

$$P_{SH} = S\frac{h}{2\pi} \qquad ; S = \pm 1/2$$

ومن نتائج هذه التجربة أيضا إثبات نظرية تكمية الفراغ (شكل ٧ - ١٠) space quantization .

مبدأ باولى : Pauli exclusion principle :

تعالج جميع الحالات السابقة حالة جسيم واحد فى المجموعة مثلا إلكترون واحد فى مسار حول نواة . ولكن ليست هذه هى الحالة العامة .

فى حالة الذرة متعددة الإلكترونات يعالج كل إلكترون على حدة ، ثم تجمع الحلول للحصول على حل عام . وتكون طاقة الذرة هى مجموع طاقات الإلكترون فى حالاتها المختلفة . ولما كان هناك عدد من الإلكترونات فقد وجد باولى أنه **لا يمكن لأكثر من إلكترون واحد أن يكون على حالة كمية واحدة** .أى أنه **لا يمكن لأى إلكترونين أن يشتركا فى نفس الأعداد الكمية الأربعة** n, ℓ, m, s ، وهذا يعنى أن مستوى الطاقة الأول يشغله الكترونان فقط $S = \pm 1/2$ ، وإذا وجد أكثر من إلكترونين فى الذرة فإن الثالث يأخذ مكانه فى مستوى الطاقة الأعلى ، وبعد أن يتم شغل هذا المستوى أيضا ننتقل للمستوى التالى وهكذا .

ومن الجدير بالذكر أن مبدأ باولى قد تم اكتشافه قبل تطور ميكانيكا الكم والتى أثبتته فيما بعد .

الجدول الدورى : Shells and subshells :

The periodic table :

اعتبر ذرة متعادلة بها عدد Z من الإلكترونات فى مستويات الطاقة المنخفضة lowest states .

أول إلكتونين يشغلان $1S$ وهى الحالة الكمية الأولى التى يعرفها

$$(n = 1 \; ; \; \ell = 0 \; ; \; m_\ell = 0 \; , \; S = \pm 1/2)$$

وباعتبار مبدا بأولى لا يجوز أن يتواجد فى هذه الحالة أكثر من هذين الإلكترونين . ولكن يمكن للإلكترونات أن توجد على مستويات الطاقة الأعلى .

$n > 1$

تكون الإلكترونات التى يكون لها نفس العدد الكمى n ما يسمى قشرة إلكترونيه Shell

تنقسم كل قشرة الكترونية shell إلى تحت قشرات subshells حسب قيمة ℓ

وعدد الإلكترونات التى توجد فى كل subshell تحت قشرة هو $N_\ell = 2\,(2\ell + 1)$

لأن m_ℓ تأخذ القيم

$$-\ell, -(\ell - 1) \ldots \quad ; -1, 0, +1, \ldots +\ell$$

وهذه تعطى عدد $(2\ell + 1)$ قيما مختلفة لقيم m_ℓ المختلفة وبما أن فى كل حالة قيمة $s = \pm \frac{1}{2}$ ، لذلك تكون عدد الإلكترونات الكلية فى الـ (subshell) تحت صدفة هو $2\,(2\ell + 1)$

<< S = 2 ; p = 6 ; d = 10 ; f = 14 .... >>

أى أن عدد الإلكترونات الكلى الذى يوجد فى القشرة shell هو $2n^2$

ونحصل على هذه القيمة بتجميع الإلكترونات الموجودة فى sub shells تحت القشرات لجميع قيم ℓ .

$$\therefore Nn = \sum_{\ell = 0}^{\ell = n-1} N_\ell$$

$$= \sum_{\ell = 0}^{n-1} 2\,(2\ell + 1) = 4 \sum_{0}^{n-1} \ell + 2 \sum_{0}^{n-1} 1$$

لكن المتسلسلة

$$\sum_{0}^{n-1} \ell = 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1)$$

وبما أن عدد المتسلسلة n ومتوسط قيمة الحد $\frac{n-1}{2}$ يكون مجموع المتسلسله هو

$$\sum_{0}^{n-1} \ell = n\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

أيضا $$\sum_{0}^{n-1} 1 = n \times 1$$

وبالتعويض فى معادلة Nn نحصل على عدد الإلكترونات الذى يملأ القشرة :

$$\therefore \quad N_n = 4\,\frac{n\,(n-1)}{2} + 2\,n = 2\,n^2$$

ويبين الجدول الآتى أعداد الإلكترونات فى مستويات الطاقة المختلفة :

n	l	m_l	m_s	Number	of electrons
1	0	0	± 1/2	2	$1S^2$
2	0	0	± 1/2	2	$2S^2$
	1	1	± 1/2	6	$2P^6$
		0	± 1/2		
		-1	± 1/2		
3	0	0	± 1/2	2	$3S^2$
	1	1	± 1/2	6	$3P^6$
		0	± 1/2		
		-1	± 1/2		
	2	2	± 1/2	10	$3d^{10}$
		1	± 1/2		
		0	± 1/2		
		-1	± 1/2		
		-2	± 1/2		

وبترتيب العناصر حسب أعدادها الذرية ، أى حسب عدد الإلكترونات الموجودة بكل ذرة نحصل على ما يسمى بالجدول الدورى .

إذا بدأنا بالأيدروجين $Z = 1$ ويشغل الإلكترون الوحيد هنا المستوى الأول $n = 1$ ويكون رمز الالكترون هو $1S^1$ ، بالنسبة للهيليوم يوجد الكترونان $1S^2$ ، ويصبح مستوى الطاقة الأول $n = 1$ عندئذ مشبعا ، أى لايقبل أى الكترون أضافى ، ويكون شكل الدالة

الموجية Ψ فى هذه الحالة كريا تقريباً ، ولذلك لايقبل الهيليوم الاتحاد مع أى عنصر آخر (inert gas) ولذلك يسمى خاملاً . وكذلك الحال كلما امتلا أحد مستويات الطاقة عن آخرها فإننا نصل إلى عنصر خامل . العنصر الخامل التالى بعد الهيليوم هو النيون ويحتوى على (ls2 + 2s2 + 2p6) عشرة إلكترونات لكل ذرة . والتالى هو الأرجون ويحتوى ٢٨ ويطلق عادة على الأغلفة الأولى الحروف

K ; L ; M ; N ;

(n = 1) (n = 2) (N = 3) (n - 4)

الجدول الدورى

N	M			L		K		
	3 d $\ell = 2$	3 P $\ell = 1$	3 S $\ell = 0$	2 P $\ell = 1$	2 S $\ell = 0$	1 S $\ell = 0$		
First short period						1	H	1
						2	He	2
					1	2	Li	3
					2	2	Be	4
				1	2	2	B	5
				2	2	2	C	6
				3	2	2	N	7
				4	2	2	O	8
				5	2	2	F	9
				6	2	2	Ne	10
Second short period			1	6	2	2	Na	11
			2				Mg	12
		1	2		Neon core		Al	13
		2	2				Si	14
		3	2				P	15
							S	16
							Cl	17
							A	18

مسائل علي الباب السابع

١ - أوجد التردد الكلاسيكى لإلكترون يدور فى مسار دائرى حول بروتون بدلالة نصف قطر المسار .

٢ - عندمــا يرى خط الصــوديوم $(\lambda = 5890\ A^{\circ})$ فى اتجـاه خطوط مـجـال مغنطيس شدته $(10{,}000\ \ O_e)$ يظهر هناك خطان يفصلها مسافة $d\lambda$. أوجد هذه المسافة .

٣ - إذا كان العمر الزمنى لذرة مثارة هو 10^{-8} s أوجد أقل تردد للفوتون المنبعث منها باستخدام مبدأ عدم التحديد (اعتبر هذا الزمن هو زمن انبعاث الفوتون ثم أوجد طاقته ومن ثم تردده)

٤ - عندما يتحد الكترون وجسيم الفاء وكلاهما فى حالة سكون لتكوين أيون هليوم ينبعث فوتون . أوجد الطاقة التى يحملها هذا الفوتون .

٥ - إذا علم إن ميزون باى $(\pi - meson)$ له نفس شحنة الإلكترون ولكن كتلته 275 ضعفا . وإذا فرض أن هذا الميزون يكون مع بروتون ذرة تشبه ذرة الهيدروجين . أوجد طاقة المسار ونصف قطره $(n = 1)$.

٦ - إذا علم أن طول موجة الخط الأول لطيف ذرة الهيـدروجين فى سلسلة بالمرهو $6563\ A^{\circ}$ وإذا وجد أن الاختلاف فى هذا الطول عندما يكون الطيف للهيدروجين الثقيل (ديوتيريوم) هو $1.8\ A^{\circ}$. أوجد النسبة بين كتلة ذرة الديوتيريوم وذرة الهيدروجين .

٧ - أوجد الأعداد الكمية المصاحبة للحالات الممكنة لذرة الهيدروجين التى تقابل العدد الكمى الرئيسى $n = 2$.

٨ - اعتبر الكترون له الأعداد الكمية التالية

$$n = 4 \quad ; \quad \ell = 3 \quad ; \quad m_\ell = 3$$

أوجد القيمة العددية لكمية الحركة الزاوية المدارية ومركبتها فى اتجاه z

٩ - ينشأ الضوء الأصفر للصوديوم من انتقال الكترون من المستوى 3p إلى المستوى 3 S .

أوجد طول موجة الضوء الناتج إذا علم أن فرق مستوى الطاقة هو

$$E_{3p} - E_{3S} = 2.1 \text{ ev}$$

الباب الثامن

الذرة متعددة الإلكترونات The many electron atom

نموذج المتجهات للذرة The Vector model

لأى إلكترون يدور حول النواة كمية حركة زاوية $\frac{\ell h}{2\pi}$ حيث ℓ كمية متجهة تأخذ القيم $0 , 1 , 2 , \ldots$

وله أيضا كمية حركة زاوية مغزلية $\frac{s h}{2\pi}$ حيث $S = \pm 1/2$. تكون محصلة كمية الحركة الزاوية للمتجهين ℓ & S هى :

$$\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{S}$$

$$\therefore \; j = \ell \pm 1/2$$

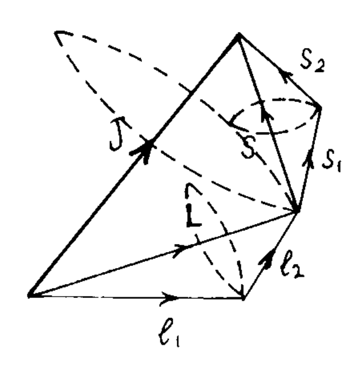
أى إنه لكل قيمة من قيم ℓ يوجد قيمتان لمحصلة كمية الحركة الزاوية j . عند وجود مجال مغنطيسى تميل هذه المتجهات بتأثير المجال بحيث تصنع مساقطها على اتجاه المجال (الأعداد الكمية المغنطيسية m_ℓ , m_S) أعدادا صحيحة أو نصف صحيحة integers or half integers

الربط بين الإلكترونات electron coupling :

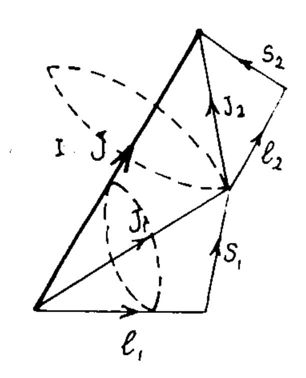
الفعل البينى للإلكترون فى الذرة متعددة الإلكترونات يحدد صفات التركيب الإلكترونى electron configuration ، وبالتالى يحدد مستويات الطاقة فى الذرة .

يوجد نوعان من الربط (طريقتان للربط) . شكل (٨ - ١)

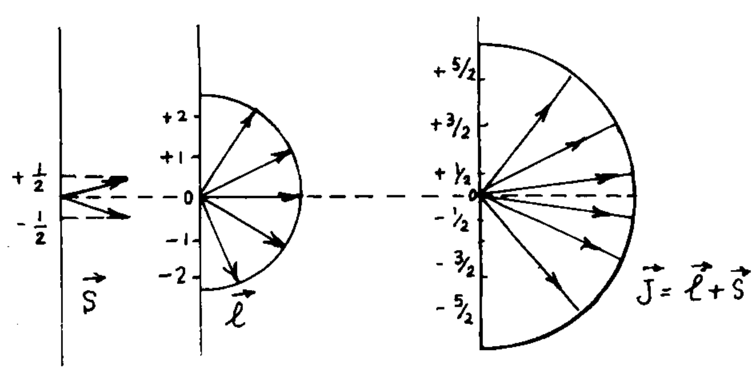
١ - نربط أولا بين متجهات ℓ للإلكترونات المختلفة فنحصل على $L = \Sigma_i \, \ell_i$



L - S coupling



J - J . coupling



شكل (٨ – ١)

وبالمثل بالنسبة للمتجهات s فتكون المحصلة $S = \Sigma_i S_i$

فإذا حصلنا S & L نحصل على المتجهة J حيث :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

ويسمى هذا الربط بربط L - S   L - S coupling

٢ – إذا حصلنا متجهات $\vec{\ell}$, $\vec{S}$ لكل إلكترون على حدة لنحصل على :

$$\vec{j_1} = \vec{\ell_1} + \vec{S_1} \quad ; \quad \vec{j_2} = \vec{\ell_2} + \vec{S_2} \quad , \ldots$$

ثم نحصل المتجهات $\vec{j}$ لجميع الإلكترونات حيث تسمى هذه الطريقة بـ « Russels - Saunders coupling »

$$\vec{J} = \Sigma_i \vec{j}$$

وتوجد طرق أخرى لتحصيل هذه المتجهات ولكن الطريقة الأكثر استعمالا هى طريقة جمع المتجهات S & L .

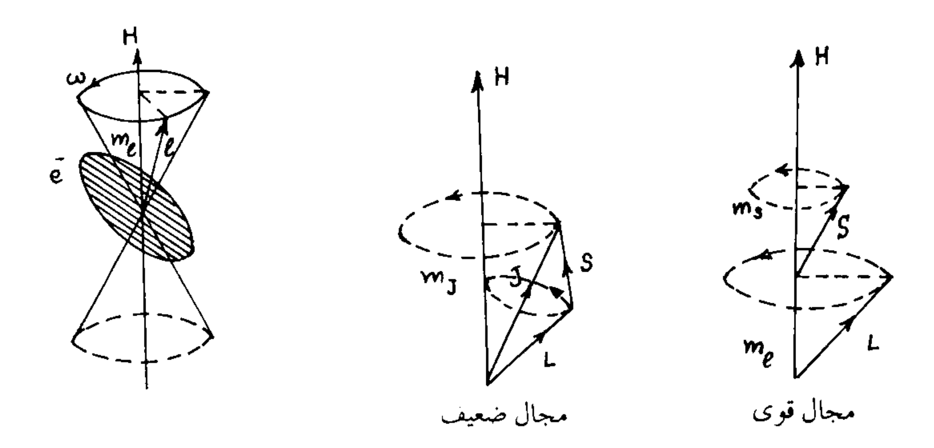
حركة إلكترون الذرة فى مجال مغنطيسى : Larmor precession :

إذا أثرنا بمجال مغنطيسى على ذرة ما فإن محاور حركة الإلكترونات تدور حول المجال بسرعة زاوية ω_L تساوى حسب النظرية الكهرمغنطيسية :

$$\omega_L = \frac{e\,H}{2\,mc}$$

حيث e شحنة الإلكترون m كتلته ، c سرعة الضوء . ويكون تردد لارمور :

$$f_L = \frac{e\,H}{4\,\pi\,mc}$$



شكل (٨ - ٢)

نعتبر الان ثلاث حالات : [انظر شكل (٨ - ٢)]

أ - **فى ذرة معزولة** يكون المتجه J ثابت الاتجاه والمقدار ، ولكن يدور كل من S , L حول المتجه L وذلك بسبب المجال المغنطيسى الذاتى لحركة الإلكترون ، والذى يسبب ذلك هو الفعل البينى المغزلى المدارى spin - orbit interaction

ب – فى وجود مجال مغنطيسى ضعيف :

تستمر حركة L , S حول J ولكن يدور المتجه J أيضا حول اتجاه المجال المغنطيسى H ويوصف عادة الإلكترون فى هذه الحالة بالأعداد الكمية الآتية : n , ℓ, j , m_j .

جـ – فى وجود مجال مغنطيسى قوى :

يتلاشى نسبيا أو يتضاءل تأثير الفعل البينى المغزلى المدارى فـى وجـود مغنطيسى قوى ، إذ يكون عندئذ مجال الإلكترون الذاتى صغير جدا نسبيا . ولذلك فـإن المتجـه J (محصلة S L) يكون غير قائما ، ويدور كل من L ، S على انفراد حول المجال H .

وتوصف حالة الإلكترون عندئذ بالأعداد الكمية n , ℓ , m_ℓ , m_S

تأثير المجال المغنطيسى على مستويات الطاقة فى الذرة :

نعتبر أولا إلكتروناً واحداً ممن فى الذرة . حركته المدارية تكسبه عزم مغنطيسيا m_ℓ ويكافىء فى تأثيره مغنطيس يتعامد محوره مع مستوى المدار للإلكترون :

$$M_\ell = I . A . = - \frac{ev}{2\pi rc} . \pi r^2$$

$$= - \frac{evr}{2 c}$$

للإلكترون أيضا كمية حركة زاوية .

$$P_\ell = m v r$$

وبحذف السرعة v من المعادلتين السابقتين نحصل على :

$$\therefore \overrightarrow{M_\ell} = - \frac{e}{2mc} . \overrightarrow{P_\ell}$$

حيث يكون المتجهان $\overrightarrow{P_\ell}$ ، $\overrightarrow{M_\ell}$ متعاكسين اتجاها لأن الإلكترون شحنة سالبة .

عندما ندخل فى الاعتبار الحركة المغزلية للإلكترون نجد حسب النظرية الكهرمغنطيسية عزما مغنطيسيا M_S مصاحبا لهذه الحركة المغزلية كذلك كمية حركة زاوية P_S ويمكن إثبات أن

$$\overrightarrow{M_S} = -\frac{e}{mc}\overrightarrow{P_S}$$

ويلاحظ هنا أن النظرية تعطى عزما مغنطيسيا للحركة المغزلية يعادل ضعف العزم المغنطيسى الناشىء عن الحركة المدارية نفرض أننا أثرنا بمجال مغنطيسى H فى اتجاه Z مثلا تكون مركبتا P_ℓ ، P_S فى اتجاه المجال هما P_{SH} ، $P_{\ell H}$ ويكون متوسط العزم المغنطيسى فى اتجاه المجال هو :

$$M = -\frac{e}{2mc}\left(P_{\ell H} + 2\ P_{sH}\right)$$

عندما يكون هناك عدد كبير من الإلكترونات فى الذرة الواحدة يكون هذا العزم المتوسط فى اتجاه H هو :

$$\overrightarrow{M} = -\frac{e}{2mc}\left(\Sigma P_{\ell H} + 2\Sigma\ P_{sH}\right)$$

إذا كان هذا العزم المتوسط فى اتجاه المجال المغنطيسى فإن الذرة تكون بارا مغنطيسية paramagnetic .

إذا كانت الحركة المغزلية الإلكترونية فى الذرات المختلفة فى المادة تترتب متراصة فى اتجاه المجال المغنطيسى كانت هذه المادة فيرومغنطيسية Ferro-magnetic .

نظرية الطاقة المغنطيسية : Theory of magnetic energy

عند التأثير بمجال مغنطيسى H علي مغنطيس عزمه M يكون للمغنطيس طاقة موضع تساوى $- MH\ \cos\theta$ حيث θ هى الزاوية بين M , H فى حالة ذرة متعددة الإلكترونات يكون التغير فى مستوى الطاقة الذرية الناشىء عن المجال المغنطيسى هو :

$$\Delta\ E_H = -\ \overline{M}.\ H\ .$$

$$\overline{M} = M\ \cos\ \theta$$

حيث

وتساوى مركبة العزم المغنطيسى فى اتجاه H

$$\therefore\ \Delta E_H = \frac{e\,H}{2\,m\,c}\ \Sigma\,(\,P_{\ell h} + 2\,P_{Sh}\,)$$

عندما يكون المجال قويا تتعرف حالة الإلكترونات بالأعداد الكمية n , m_ℓ , m_s وتكون مركبتا كمية الحركة الزاوية المدارية والمغزلية P_{SH} ، $P_{\ell H}$ على الترتيب فى اتجاه المجال هما:

$$P_{\ell H} = m_\ell . \frac{h}{2\pi}$$

$$P_{SH} = m_S . \frac{h}{2\pi}$$

ويكون عندئذ التغير فى الطاقة المغنطيسية هو :

$$\Delta E_H = \frac{eh}{4\pi mc} \Sigma (m_\ell + 2 m_S) . H$$

ويتم الجمع Σ على جميع إلكترونات الذرة .

إذا كان مستوى الطاقة هو E_n قبل التأثير بالمجال ، ثم أصبح E_H بعد المجال فإن :

$$\Delta E = E_H - E_n$$

$$\therefore E_H = E_n + \frac{eh}{4\pi mc} \Sigma (m_\ell + 2 m_S)) . H$$

ولما كان تغير $(m_\ell + 2 m_S)$ دائما بأعداد صحيحة integral ، لذلك فإن كل مستوى أصلى واحد للطاقة الإلكترونية E_n ينقسم إلى عدد من المستويات E_H تميزها القيم الصحيحة $m_\ell + 2 m_S$ ، والتى تأخذ القيم من $(\ell + 1)$ عندما تكون $m_s = + 1/2 \& m_\ell = 1$ إلى $(\ell + 1)$ - عندما تكون $m_s = - 1/2 \& m_\ell = - 1$. وتبعد عن بعضها بمقادير متساوية من الطاقة equally spaced . الفرق بين أى مستويين متتاليين هو $\frac{eh}{4 \pi mc} . H = B . H$ أى حاصل ضرب بوهر ماجنتون في شدة المجال المغنطيسى.

فى حالة مغنطيسى قوى « تأثير زيمان المعتاد » :

إذا اعتبرنا مستويين من الطاقة E_1 ، E_2 يميزهما $n = 1$ ، $n = 2$ يكون تردد خط الطيف بينما هو :

$$\upsilon_0 = (E_2 - E_1 / h)$$

انظر شكل (٨ – ٣)

وعند التأثير بالمجال المغنطيسى يكون :

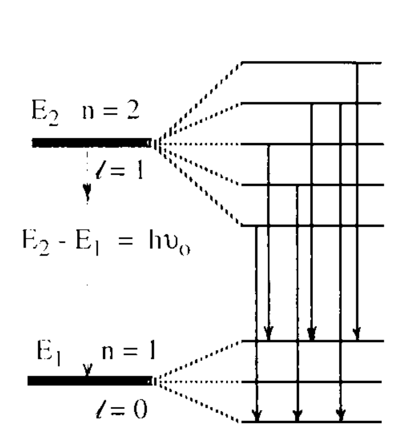
$$E_2^! - E_1^! = (E_2 - E_1) + \frac{eh}{4\pi mc}(m_\ell + 2 m_s) H$$

حيث :

$$\Delta m_\ell = m_\ell^* - m_\ell \ \& \ \Delta m_S = m_s^* - m_S$$

(النجمة هنا تعنى وجود المجال المغنطيسى)

$$\therefore h\upsilon^! = h\upsilon + \frac{eh}{4\pi mc}(\Delta m_\ell + 2\Delta m_S) . H$$



m_ℓ	m_S	$(m_\ell + 2 m_S)$
1	1/2	2
0	1/2	1
-1	1/2	0
+1	-1/2	0
0	-1/2	-1
-1	-1/2	-2

The normal triplet

m_ℓ	m_S	$(m_\ell + 2 m_S)$
0	1/2	1
0	-1/2	-1

شكل (٨ – ٣)

$$\therefore \upsilon^! = \upsilon + \frac{eH}{4\pi me}(\Delta m_\ell + 2\Delta m_S)$$

وتعطى قاعدة الاختيار selection rule الشرط اللازم ، لكى يقفز الالكترون من المستوى المرتفع للمنخفض وهذه هى : -

$$\Delta \ell = \pm 1 \ , \ \Delta (m_\ell) = \pm 1 \ \text{or} \ O \ ; \Delta \ m_S = 0$$

∴ الترددات الممكنة عند وجود المجال هى :

(i) $\Delta \ M = 0 \qquad \therefore \ \upsilon^1 = \upsilon$

(ii) $\Delta \ M = -1 \qquad \therefore \ \upsilon^1 = \upsilon + \dfrac{eH}{4\pi \ mc}$

(iii) $\Delta \ M = +1 \qquad \therefore \ \upsilon^1 = \upsilon - \dfrac{eH}{4\pi \ mc}$

وهذا يدل على أن الخط الواحــد υ قد انقسم إلى ثلاثة تسمى بالثلاثى المعتاد Normal triplet ، وهذا يفسر تأثير زيمان المعتاد Normal Zeeman effect فى حالة المجالات القوية .

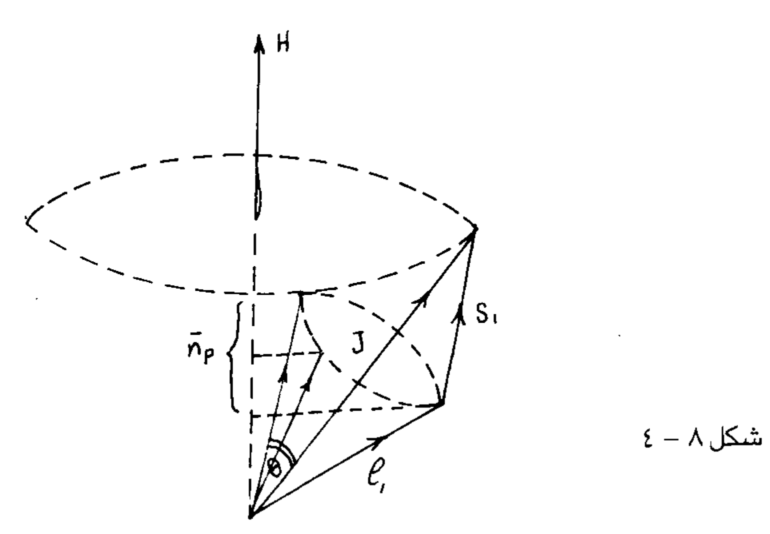
أثير زيمان الشاذ :

أما فى حالة المجالات الضعيفة ، فقد وجد أن الخط الواحد ينقسم إلى عدد أكبر من الخطوط ، وسمى هذا بتأثير زيمان الشاذ Anomalous Zeeman's effect .

فى حالة المجال المغنطيسى الضعيف يستمر الفعل البينى المدارى المغزلى ، ويكون العدد الكمى J مناسبا spn - obit interaction للإستعمال فى هذه الحالة . شكل (٨-٤)

تتحدد الطاقة المغنطيسية بالقيم المتوسطة لكميات الحركة الزاوية المدارية والمغزلية فى اتجاه المجال المغنطيسى . مركبات المتجهات (ℓ ؛ S) لكل إلكترون فى اتجاه عمودى على المحصلة J تتلاشى ، حيث إن الشكل من ℓ ، S يدور حول J بالفعل البينى اللف المدارى .

∴ مركبات ℓ , S فى اتجاه J هى التى يكون لها التأثير فقط ، وتعطى مركبات هذه المركبات فى اتجاه المجال H القيم المتوسطه لمركبات كمية الحركة الزاوية الالكترونية فى اتجاه المجال المغنطيسى .



شكل ٨ – ٤

إذا كان M هو العدد الكمى الكلى المغنطيسى Total magnetic quantum number

وهو ينتاسب مع $\cos\theta$ حيث θ هى الزاوية بين اتجاه المحصلة J مع المجال H فإن :

$$\overline{P}_{\ell H} = g_1 M \frac{h}{2\pi}$$

$$\overline{P}_{SH} = g_2 M \frac{h}{2\pi}$$

حيث g g_1 هى مقادير ثابتة (ثوابت التناسب) ولا تتوقف على قيمة M . وبالتجميع على كل الكترونات الذرة فإن :

$$\Sigma\ \overline{P}_{\ell H} + 2\,\Sigma\ \overline{P}_{SH} = g M \frac{h}{2\pi}$$

حيث :

$$g = \Sigma\ g_1 + \Sigma\ g_2$$

وبذلك نحصل على طاقة مستوى معين ، J مثلا

$$E_{HJ} = E_{OJ} + \frac{eh}{4\pi m c}\ g MH$$

حيث E_{HJ} . E_{OJ} هما طاقتا المستوى J فى وجود وفى عدم وجود المجال H على الترتيب .

من المعادلة السابقة يظهر أنه فى حالة التأثير بمجال مغنطيسى ضعيف ينقسم مستوى الطاقة J إلى عدد من المستويات تفصل بينهما قيم متساوية من الطاقة . ويتوقف

العددعلى القيم المختلفة التى تأخذها M .

وقيمة المعامل g تتغير مع تغير المستوى J ويسمى g بمعامل لاندى للانقسام Landé splitting facor .

إذا اعتبرنا مستويين للطاقة J_1 , J_2 فإن :

$$E_{HJ1} = E_{OJ1} + \frac{eh}{4 \pi m c} H \; g_1 M_1$$

$$E_{HJ2} = E_{OJ2} + \frac{eh}{4 \pi m c} H \, g_2 \; M_2$$

وبالطرح وبالقسمة على hc لإيجاد الأعداد الموجية :

$$\frac{1}{hc} (E_{JH2} - E_{HJ1}) = \frac{1}{hc} (E_{OJ2} - E_{OJ1}) + \frac{eH}{4 \pi m c^2} (g_2 M_2 - g_1 M_1)$$

or

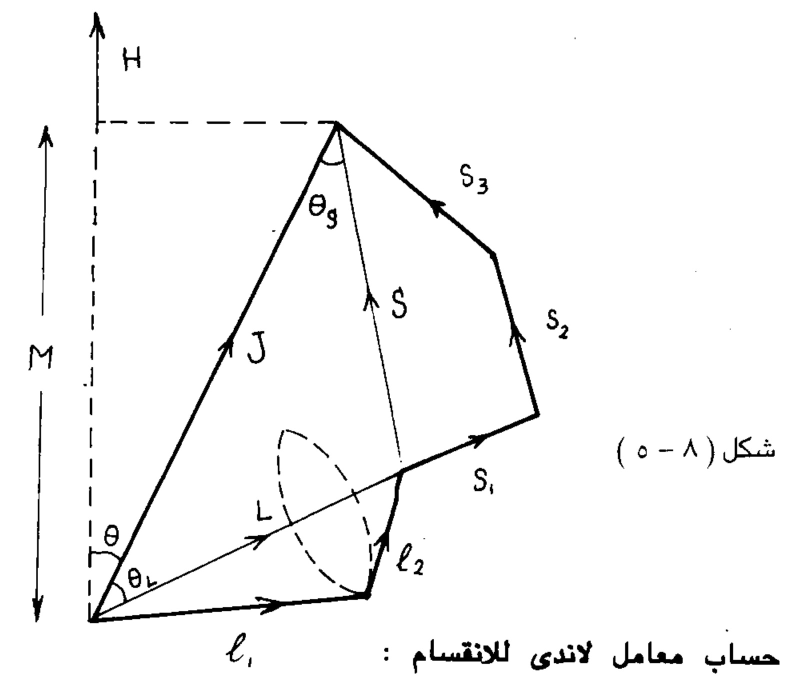
$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_0 + (g_2 M_2 - g_1 M_1) \; . L$$

حيث L تساوى $\frac{eH}{4 \pi m c^2}$

وتعطى المعادلة السابقة جميع خطوط زيمان للمستويين J_2 , J_1 عند وجود مجال مغنطيسى ضعيف . ويلاحظ أن M_1 تأخذ القيم من $+ J_2$ إلى $- J_2$ وتأخذ M_2من $+ J_1$ إلى $- J_1$

. ويخضع المقدار بين القوسين ($g_2 M_2 - g_1 M_1$) إلى قاعدة الاختيار Selection rule .

$$\Delta M = M_2 - M_1$$
$$= 0 \text{ or } 1$$



شكل (٨ – ٥)

حساب معامل لاندى للانقسام :

اعتبر رابطة LS في مجال مغنطيسى ضعيف . يبين شكل (٨ – ٥) حالة ذرة ذات ٣ إلكترونات حيث $\ell_3 = 0$

يتوقف أطوال مساقط المتجهات ℓ ، s في اتجاه المجال المغنطيسى H على شدة المجال.

المركبات العمودية على L لكل من (ℓ_1 , ℓ_2) تتلاشى عند تجميعها في جميع الأوضاع.

مجموع مساقط المتجهات ℓ في اتجاه المجال H هى نفسها مسقط المتجه L في اتجاه H أى أن :

$$\Sigma \ \ell_H = L \cos \ \theta_L \ \cos \ \theta$$

حيث θ_L هى الزاوية بين (J , L)

، θ هى الزاوية بين (J , H)

بالمثل بالنسبة للمتجهات S

$$\Sigma S_H = S \ \cos \theta_S \ \ \cos \theta$$

حيث θ_S هى الزاوية بين (J , S)

من هندسة الشكل :

$$M = J \cos \theta$$

$$S^2 = J^2 + L^2 - 2\,LJ \cos \theta_L$$

$$L^2 = J^2 + S^2 - 2\,J\,S \cos \theta_S$$

$$\Sigma\, \ell_H = \frac{M}{2\,J^2} \left(J^2 + L^2 - S^2 \right)$$

$$\Sigma\, S_H = \frac{M}{2\,J^2} \left(J^2 + S^2 - L^2 \right)$$

ونظرا لأن نموذج المتجهات للذرة يمثل بشكل ما كميات الحركة الزاوية ، لذلك تكون مركبات كمية الحركة الزاوية المدارية والمغزلية فى اتجاه H هى :

$$\Sigma\, P_{\ell H} = \frac{h}{2\,\pi} \quad \Sigma\, \ell_H$$

$$\Sigma\, p_{SH} = \frac{h}{2\,\pi} \quad \Sigma\, S_H$$

وباستبدال الأعداد الكمية J^2 ، L^2 ، S^2 بالمقادير $J(J+1)$ ، $L(L+1)$ ، $S(S+1)$ كما أثبتت النظرية الكمية ، نجد أن

$$\Sigma\, P_{\ell H} + 2\,\Sigma\, P_{SH}$$

$$= \frac{Mh}{4\,\pi\, J\,(J+1)} \left[(3\,J\,(J+1) + S\,(S+1) - L\,(L+1) \right]$$

$$= \frac{Mh}{2\,\pi} \left[(1 + \frac{J\,(J+1) + S\,(S+1) - L\,(L+1)}{2\,J\,(J+1)} \right]$$

$$= g\, \frac{Mh}{2\,\pi}$$

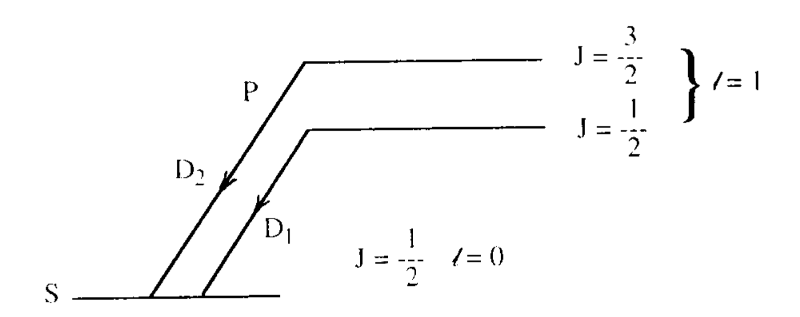
حيث g هو ثابت لاندى للانقسام ويعطى بالمقدار :

$$g = \left[(1 + \frac{J\,(J+1) + S\,(S+1) - L\,(L+1)}{2\,J\,(J+1)} \right]$$

$$= 3/2 + \frac{S\,(S+1) - L\,(L+1)}{2\,J\,(J+1)}$$

حساب تأثير زيمان الشاذ لخطى الصوديوم :

يظهر فى طيف الصوديوم خطان D_1 , D_2 فى اللون الأصفر $5896\ A^\circ$ ، 5890 A وقد أظهر التحليل الطيفى أنهما ناشئان عن انتقال الإلكترون من p - state حيث الأعداد الكمية الداخلية هى $\ell = 1$, $J = 1/2$, $J = 3/2$ إلى الحالة S (S - state) حيث الأعداد الكمية هى $j = 1/2$ ، $\ell = 0$ (كما فى شكل ٨ - ٦)



شكل (٨ - ٦)

أولا نحسب قيم g لكل من المستويات الثلاثة :

١ - $g_1 = 2 \quad \therefore \quad j = 1/2\ ,\ \ell = 0$

٢ - $j = 1/2\ ,\ \ell = 1$

$$g_2 = 3/2 + \frac{1/2 \times 3/2 - 1 \times 2}{2 \times 1/2 \times 3/2}$$

$$\therefore \quad g_2 = 2/3$$

٣ - $\therefore \quad g_3 = 4/3 \quad j = 3/2\ .\ \ell = 1$

لإيجاد مواضع خطوط الطيف الجديدة فى مجال مغنطيسى ضعيف نكون جدولا كما يأتى :

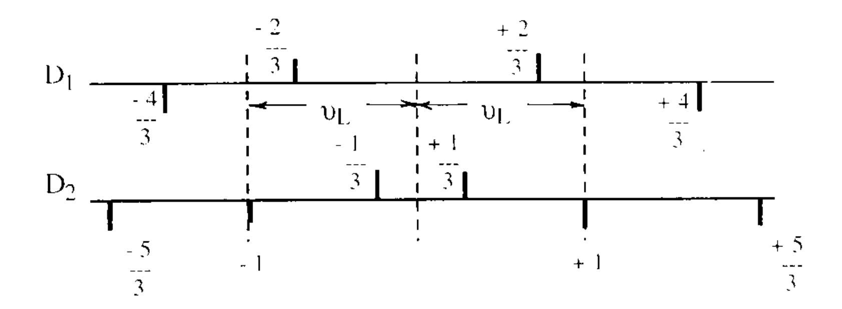
D_1 transition	g = factor	M = - 1/2 M = + 1/2
$\ell = 1$ $j = 1/2$	$g_2 = 2/3$	g M = - 1/3 + 1/3
$\ell = 0$ $j = 1/2$	$g_1 = 2$	g M = - 1 + 1

D_2 transition	g = factor	-3/2 -1/2 1/2 3/2
$\ell = 1$ $j = 3/2$	$g_3 = 4/3$	-2 -2/3 +2/3 +2
$\ell = 1$ $j = 1/2$	$g_1 = 2$	-1 +1

شكل (٨ – ٧)

$\Delta M = 1$ selection rules

$\Delta M = \pm 0$



شكل (٨ – ٨)

ويبين شكل (٨ – ٨) انقسام خطى طيف الصوديوم فى مجال مغنطيسى ضعيف .

الجزء الثالث

الباب التاسع

فيزياء الجوامـــد Solid-State Physics

٩ - ١ مقدمة :

تتركب المادة فى حالاتها المعروفة غازية ، سائلة ، صلبة من ذرات وجزيئات دائمة الحركة ، ويربط بينها قوى تكون صغيرة جدا فى حالة الغازات ، وتكون أكبر فى حالة السوائل بينما هى فى الأجسام الصلبة قوى كبيرة جدا ، تحفظ للجسم شكله وحجمه .

ونظرا لصغر هذه القوى فى الغازات والسوائل فإن جزيئاتها تتحرك عشوائيا ، ولا يكون هناك ترتيب منتظم لها . بينما فى حالة الأجسام الصلبة فهى نوعان :

أ - مواد صلبة بلورية crystalline وهى التى تترتب ذراتها بانتظام على شكل خلايا تتكرر فى الاتجاهات الصلبة X, Y , Z لتكون الجسم .

ب - مواد صلبه غير بلوريه amorphous مثل الزجاج الذى يعتبر فى معظم الأحوال كأنه سائل فوق مبرد super cooled liquid.

٩ - ٢ قوى الترابط Binding forces بين الذرات :

أ - قوى جاذبة : Attractive force :

١ - قوى كولومية Couomb forces تنتج من تجاذب الشحنات الكهربائية المختلفة.

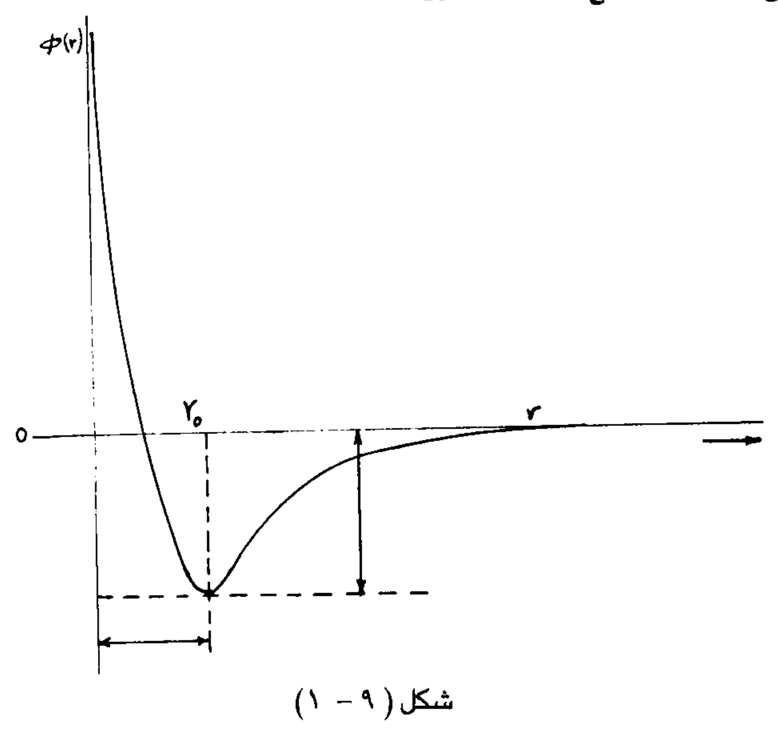
٢ - قوى فاندرفال Vander Waal تنتج عن تجاذب ثنائى القطب الكهربائى .

٣ - قوى تبادل exchange forces تنشأ عن الارتباط الكيميائى واشتراك الإلكترون بين ذرتين .

ب - **قوى نافرة** Repulsion forces :

ونوعها كولومى وتنتج من تنافر السحب الإلكترونية عندما تقترب ذرتان من بعضهما بدرجة كبيرة .

منحنى طاقة الموضع Potential energy curve :



شكل (٩ - ١)

باعتبار القوى السابقة نجد أن طاقة الموضع لذرتين متجاورتين تتغير مع المسافه بينهما حسب شكل (٩-١) .

وقد وضع Mie شكل التغير لطاقة الوضع مع المسافة بين الذرتين على الشكل الآتى:

$$\varphi(r) = -\frac{a}{r^m} + \frac{b}{r^n}$$

حيث b,a ثوابت والحد الأول يمثل القوى الجاذبة والحد الثانى يمثل القوى الطاردة

وتتغير قيم n , m حسب الحالة فمثلا فى حالة البلورات الأيونية تكون $m = 1$ وبالنسبة للبلورات الجزيئية تكون $m = 6$ Molecular crystals

أنواع الجوامد المتبلورة :

١ - البلورات الأيونية Ionic crystals :

مثل كلوريد الصوديوم Na Cl . لذرة الصوديوم إلكترون واحد فى مساره الخارجى $1s^2\ 2s^2\ 2p^2\ 3s^1$ إذا أزيل هذا الإلكترون فإن ذرة الصوديوم يكون تركيبها الإلكترونى مثل ذرة النيون $1s^2\ 2s^2\ 2p^6$ وهذا التركيب أكثر استقرارا .

إذا نظرنا إلى ذرة الكلور $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^5$ نجد أنه ينقصها إلكترون واحد لتصبح مثل ذرة الأرجون A (18) الأكثر استقرارا .

لذلك فإن اتحاد ذرتى الصوديوم والكلور يكون سريعا ، ويكون الملح الصلب المتكون على الشكل الأيونى .

ولكن نحفظ للجسم الصلب تعادله الكهربائى ، لذلك يجب أن تتراص أيونات الصوديوم والكلور Na , Cl تبادليا فى أى اتجاه ، أى أن كل أيون صوديوم يحيط به ستة أيونات كلور كأقرب جيران neraest neighbors .

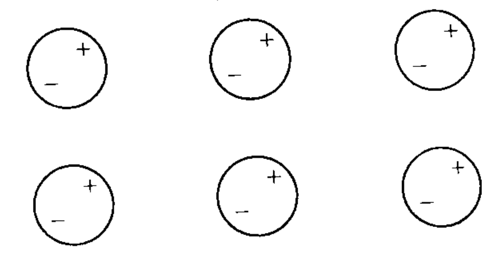
وتكون قوى الترابط الرئيسية فى هذا التركيب هى قوى كلولومية بين الشحنات السالبة والموجبة .

٢ البلورات الجزيئية Molecular crystal :

يكون الترابط هنا بقوى فاندرفال .

جميع ذرات البلورة تكون متشابهة ومتعادلة . تحمل كل ذرة شحنات موجبة فى النواه وسالبة حولها ، وهذا يشبه بشكل ما ثنائى قطب كهربائى electric dipole حيث تترتب الذرات والجزيئات كما فى شكل ٩ - ٢ ، بحيث تكون الشحنات المختلفة أقرب ما يمكن

دائما .



شكل (٩ – ٢)

وتكون القوى الكهربائية المحصلة هى الفرق بين قوى التجاذب والتنافر بين الشحنات المختلفة والمتشابهة ، ويكون الجذب أكبر قليلا من الطرد لقرب الشحنات المختلفة عن الشحنات المتماثلة .

يكون الترابط هنا ضعيفا ، ولذلك فإن درجة انصهار مثل هذه المواد (كالشمع مثلا) يكون صغيرا حيث إن رفع الحرارة وما يتبعه من تهيج حرارى thermal agitation يسبب كسر الحالة الصلبة إلى سائلة .

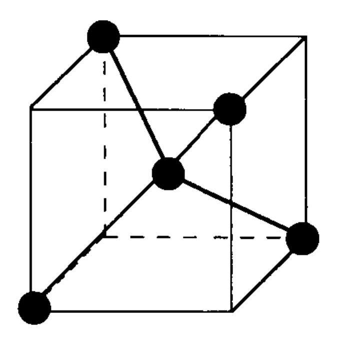
٣ – **البلورات التساهمية** covalent crystals :

فى هذه البلورات تكون الكثافة الكهربائية بين الذرات المتجاورة كبيرة وتشترك الإلكترونات فى الذرات المتجاورة .

من المعروف أننا نحصل على تركيب إلكتروني مستقر إذا استوفت الذرة عدد $2\ n^2$ إلكترون فى الغلاف الخارجى لها .

فى ذرة الكربون مثلا $1\ s^2\ 2\ s^2\ 2\ p^2$ يمكن لها أن تأخذ ٤ إلكترونات لتشبيع غلافها الثانى . فإذا كان لكل ذرة كربون أربعة ذرات كأقرب جيران يمكن أن تشترك كل

ذرتين متجاورتين فى إلكترونين ، وتصبح بذلك جميع ذرات الكربون فى الجسم الصلب ، وكأن بغلافها الخارجى عدد ٨ الكترونات وليس أربعة فقط ، وهذا وضع مستقر .



شكل (٩ - ٣)

شكل (٩ - ٣)

وتنشأ من هنا قوى ترابط غاية في القوة كما فى حالة شبيكة الماس ، شكل (٩-٣).

٤ - البلورات الفلزية :

تتميز الفلزات بعدد صغير من الإلكترونات فى اغلفتها الخارجية . وتعطى ذرات الفلز هذه الإلكترونات الخارجية لتكوين سحابة من الشحنات السالبة تحيط بأيونات هذه الذرات ، ويعود ذلك لضعف الرابطة بين هذه الإلكترونات الخارجية وبين الذررات التابعة لها .

وتكون قوى التجاذب بين الأيونات والسحابة الإلكترونية هى القوى الأساسية للترابط بين ذرات الفلز ، الذى يمكن تصويره على أنه رصة منتظمة من الأيونات الموجبة يحيط بها سحابة من الإلكترونات .

ولما كانت الرابطة هنا بين الأيون والسحابة الإلكترونية المحيطة ، لذلك تتميز الرابطة فى الفلزات بأنها مطاطة fexible ، ويعود هذا الاختلاف إلى عدم وجود ربط مباشر بين الذرات وبعضها ، كما فى الحالات السابقة .

ويلاحظ هنا أيضا أن السحابة الإلكترونية فى الفلزات تعطى لها خواصا مميزة مثل

التوصيل الكهربائى والحرارى الجيد وكذلك لمعة السطح الخارجى .

التركيب البلورى Crystal Structure space lattice :

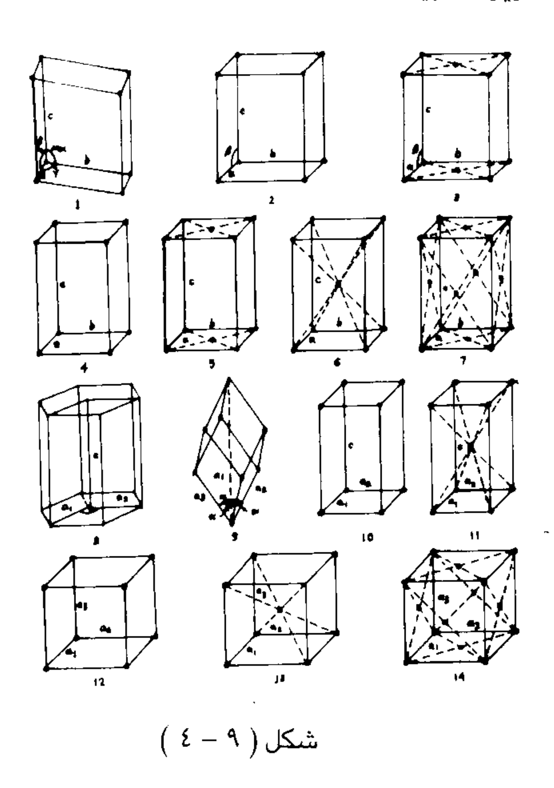
تعريف الشبيكة الفراغية :

إذا ترتب فى الفراغ عدد لا نهائى من النقط ، بحيث يكون لكل نقطة نفس الجيران identical surroudings فإنها تكون شبيكة فراغية . لكل نقطة فيها نفس عدد الجيران على نفس الأبعاد والاتجاهات .

عدد التناسق p . coordintaion number هو عدد اقرب جيران .

شبيكات برافية الأربعة عشر The 14 - Bravais lattices :

يوجد فقط أربعة عشر طريقة يمكن بواسطتها ترتيب أى عدد من النقط ، بحيث تستوفى شروط تكوين الشبيكة ، شكل (٩ - ٤)



شكل (٩ - ٤)

لكل طريقة من هذه الطرق تتحدد وحدة خلية unit cell عندما تتكرر هذه الوحدة فى الاتجاهات الفراغية الثلاثة X, Y, Z نحصل على الجسم .

وحدة الخلية هى أصغر منشور أو متوازى مستطيلات توجد عند كل ركن من أركانه نقطة شبيكة lattice point .

المجاميع البلورية . ووحدة الخلية Crystal systems & unit cells :

عدد المجاميع سبعة وأساسها محاور ثلاثة X, Y, Z تميل بزوايا φ . β . ∝ تؤخذ عادة هذه المحاور على أنها خطوط تقاطع الثلاثة أوجه الأساسية للبلورة ، والتى توازى مستويات التماثل planes of symmetry فى البلورة إذا كانت تحتوى اياها .

المجاميع السبعة هى : -

1) Triclinic $\propto \neq 90, \beta \neq 90, \varphi \neq 90$

$c < a < b$

2) Monoclinic $\propto = \varphi = 90, \beta \neq 90$

$c < a$, b arbitrary

3) Ortho rhombic $\propto = \beta = \varphi = 90$

$c < a < b$

4) Tetragonal $\propto = \beta = \varphi = 90$

$c = b \neq c$

5) Hexagonal $\propto = \beta = 90, \varphi = 120$

$a = b$, c arbitrary

6) cubic $\propto = \beta = \varphi = 90$

$a = b = c$

7) Trigonal $\propto = \beta = \varphi \neq 90$

$a = b = c$

تعيين أبعاد وحدة الخلية بمعرفة الكثافة والتركيب البلورى للمادة :

تتبلور معظم الفلزات بترتيب ذرى بسيط هو عادة .f.c.c تكعيبى متمركز الوجه أو تكعيبى متمركز الجسم b.c.c أو ;h.c.p سداسى .

ومن أمثلة بلورات .b.c.c : Fe, Cr, V , Na, K

وبلورات .f.c.c : Au - Pt - Al - Cu

وبلورات .h.c.p : Mg - Cd - Zn

فى حالة وحدة الخلية التكعيبية cubic cells يمكن تعيين أبعادها بمعرفة الكثافة d وعدد الذرات فى الخلية .

مثلا : كثافة الحديدة = 7.94 g/c.c

الوزن الذرى للحديد = 55.85

كتلة ذرة الأيدروجين = 1.66×10^{-24} g

يتبلور الحديد على الشكل .b. c . c

عدد الذرات فى وحدة الخلية = 2

حجم الخلية = a^3

حيث a هو طول ضلع الخلية lattice parameter

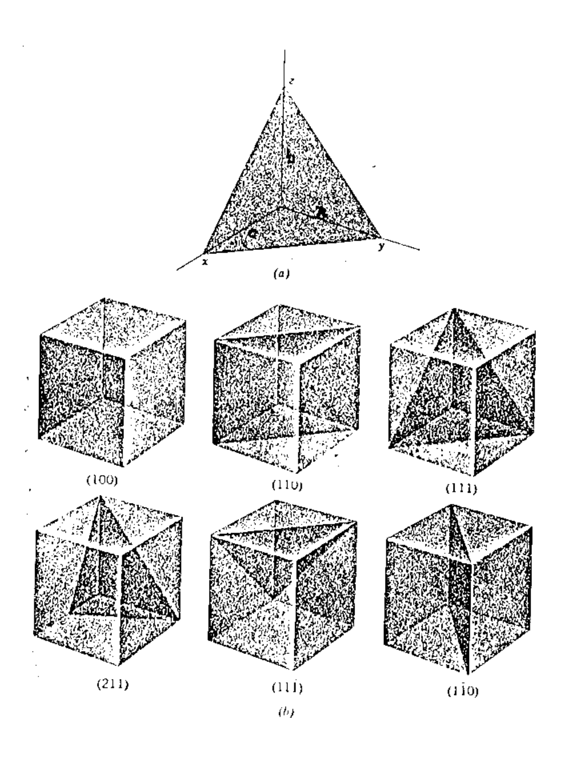
$$\text{الكثافة} = \frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$$

$$\therefore \quad 7.94 = \frac{1.66 \times 10^{-24} \times 2 \times 55.85}{a^3}$$

$$\therefore \quad a = 2.86 \times 10^{8} \text{ cm}$$

معاملات ميلر Miller indices :

تستعمل معاملات ميلر لتعريف الشبيكه فى حالة المحاور المتعامدة فقط وهدفها اعطاء وصف كامل لأى مستوى أو اتجاه فى الفراغ .



شكل (٩ – ٥)

لتعريف أى مستوى نفرض أنه يقطع المحاور x, y, z فى a, b, c نوجد مقلوبات لهذه الأعداد فنحصل على $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ وبتوحيد المقامات تصبح $\frac{h}{x}, \frac{k}{x}, \frac{l}{x}$ وبإزالة المقامات يكون المستوى قد تعرف بالمعاملات (h k l) وهى التي يطلق عليها اسم معاملات ميلر ، ويبين شكل (٩ – ٥) بعض المستويات الأساسية فى الشبيكة التكعيبية .

لتعريف اتجاه فى الفراغ نفرض وجود متجه طوله اختيارى يتجه فى نفس الاتجاه المطلوب تحديده . نوجد مساقط هذا المتجه على المحاور x, y, z, ونوجد أصغر مجموعة أعداد صحيحة تتناسب مع هذه المساقط ، ولتكن (h k l) وهذه تمثل الاتجاه .

ويلاحظ أن معاملات ميلر لتعريف أى اتجاه هى نفسها المعاملات التى تعرف المستوى

العمودى على هذا الاتجاه .

عدد مجاميع المستويات sets of planes التى لها نفس معاملات ميللر .

١ – إذا كانت المعاملات كلها مختلفة عدديا مثل (321) فإن عدد المجاميع يكون ٢٤.

٢ – إذا تساوى معاملان مثل (211) فإن عدد المجاميع يصبح ١٢ .

٣ – إذا تساوى جميع المعاملات مثل (111) فإن عدد المجاميع يصبح ٤ .

٤ – إذا كان أحد المعاملات صفراً وتساوى الآخران مثل (110) يكون عـدد المجاميـع

٥ – إذا كان معاملان من الثلاثة صفريا نحصل على ٣ مجاميع فقط .

المسافة العمودية بين مستويين متتاليين فى مجموعة معينة (h k l) تعطى بالمعادلة :

$$d\ (hkl) = a / \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$$

حيث a هو طول ضلع المكعب لوحدة الخلية ويسمى lattice parameter .

الزاوية θ بين الاتجاهين $u_1v_1w_1$ ، $u_2v_2w_2$ هى :

$$\cos\theta = \frac{u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2}{\left(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2\right)^{1/2}\left(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2\right)^{1/2}}$$

تعريفات فى التركيبات البسيطة :

١ – عدد التناسق : هو عدد أقرب جيران .

٢ – نصف قطر الذرة : هو نصف المسافة بين أقرب ذرتين متجاورتين فى بلورة من العنصر النقى بدلالة طول ضلع الخلية .

٣ – الكثافة النسبية للرص : هى النسبة بين الحجم الذى يشغله الكرات التى تمثل الذرات فى الخلية إلى الحجم الكلى للخلية . ويبين الجدول التالى بعض بيانات عن التركيبات البلوريه المعتاده

structure	s.c.	b.c.c.	f.c.c. h.c.p.	diamond
coordination No.	6	8	12	4
Atomic radius (a = cubic edge)	a / 2	$a\sqrt{3}/4$	$a\sqrt{2}/4$	$a\sqrt{3}/8$
Atoms per unit cube	1	2	4	8
Density of packing	$\pi/6$ 52 %	$\pi\sqrt{3}/8$ 68 %	$\pi\sqrt{2}/6$ 74 %	$\pi\sqrt{3}/16$ 34 %

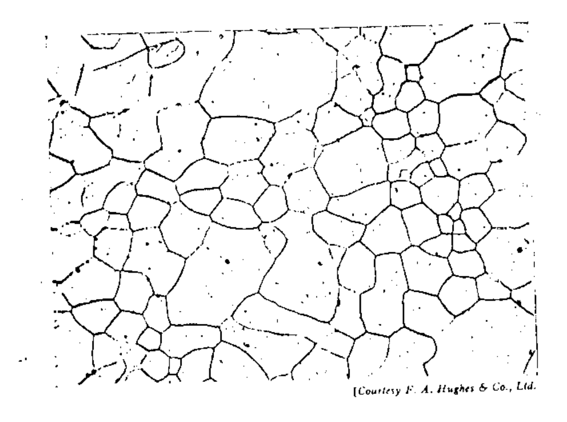
الإنماء البلورى

عندما يبدأ مصهور فلز فى التجمد تثبت درجة حرارته ، حتي يتم تحوله من الطور السائل إلى الطور الجامد مع خروج الحرارة الكامنة فى عملية التحول . تظهر تلقائيا فى أماكن مختلفة من المصهور نويات بلورية ، تأخذ فى النمو على شكل دندريت كلما ازداد التحول إلى الطور الجامد ، ويكون ذلك النمو على حساب السائل المحيط وتستمر عملية النمو حتى يتم التحول إلى الطور الجامد .

ويأخذ الدندريت شكل أفرع طويلة يقف نموها إذا ما تلامست مع دندريت آخر تختلف فيه اتجاهات المستويات الذرية ، وبنهاية التجمد تكون أسطح التلامس بين هذه الدندريتات حدودا حبيبية Grain boundaries فى مادة متعددة الحبيبات poly crystalline . انظر شكل (٩ - ٦) ويعرف حاليا الحد الحبيبى بأنه سطح يحتوي انخلاعات 2 -D array of dislocations .

عندما تكون عدد النويات التى يتجمد عليها السائل قليلة يكون الحجم الحبيبى كبيرا ، وإن كان ذلك لا يحدث تلقائيا .

ولكى نحصل على بلورة أحادية من مادة ما يجب أن تعالج حراريا بطرق خاصة بالإنماء البلورى ، تتوقف الطريقة على المادة المراد تحضير بلورة أحادية لها .



شكل (٩ – ٦)

١ – الإنماء البلورى من المحاليل المائية :

تستخدم هذه الطريقة لتحضير بلورات المواد العضوية وغير العضوية ، وفيها نحتاج لتحضير محلول مائى فوق مشبع يترك لترسب فيه بلورات أحادية ، كما هو الحال عند تحضير بلورات السكر أو الملح . وإذا أردنا تحضير بلورة أحادية لها اتجاهات بلورية معينة، نبدأ النمو ببذرة بلورة seed crystal معلومة الاتجاهات توضع فى السائل فوق المشبع ، فتتكون بلورة كبيرة لها نفس اتجاهات البذرة . وتصلح هذه الطريقة لتنمية بلورات من الهاليدات القلوية وملح روشيل .

٢ – الإنماء البلورى من المحاليل الصلبة :

ليس من الضرورى أن يكون المحلول مائيا لتحضير بلورة منه فالمحاليل الصلبة أيضا تعطى بلورات (كما فى حالة الياقوت الأحمر " الروبى ") وذلك باستعمال مذيبات نقط انصهارها مرتفعة . والجهاز المستخدم فى التحضير بسيط ، ويتركب من بوتقة من البلاتين توضع داخل فرن على قاعدة دورانية لتنظيم درجة حرارة المصهور داخلها ، ويكون دوران القاعدة فى كلا الاتجاهين ليتم خلط جميع المكونات بها . توضع المواد داخل البوتقة ويسخن الفرن كهربائيا حتى تنصهر وتذوب وبعد خلط المصهور جيدا تخفض درجة الفرن

تدريجيا بمعدل ثابت حوالى ٤°م في الساعة وتستمر عملية خفض الدرجة لمدة أيام ، وفى النهاية تذاب المواد المتجمدة فى البوتقة لاستخراج البلورات التى تكون قد تكونت أثناء عملية التبريد البطىء ، والمواد الابتدائية اللازمة لتحضير بلورات الياقوت الأحمر هى كالآتى:

١ - أكسيد رصاص PbO (٥٠٠٠ جم) .

٢ - أكسيد البورون B_2O_3 (٤٠٠ جم) .

٣ - أكسيد الألومينيوم Al_2O_3 (٧٤٠ جم) .

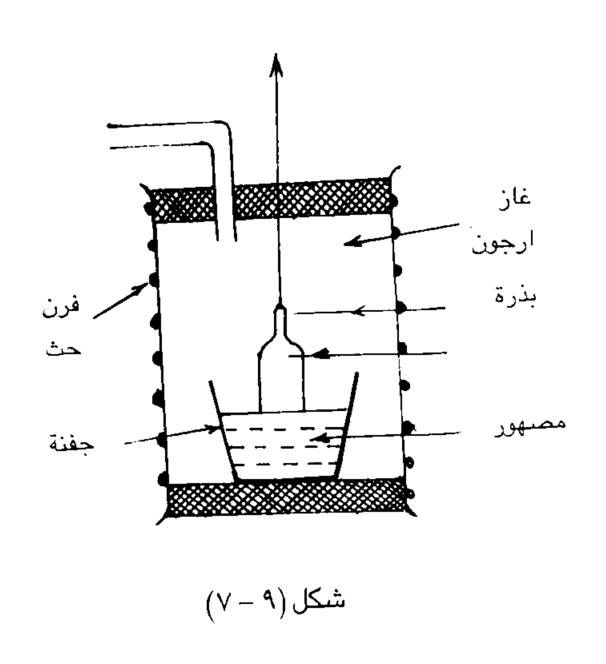
٤ - أكسيد الكروم Cr_2O_3 (٠,١ جم) .

٣ - الإنماء البلورى عن طريق الضغط والحرارة :

تستخدم هذه الطريقة لتحضير بلورات من الماس ، من المعروف أن الماس يتركب من ذرات كربون ، ولتحويل الكربون النقى فى صورته العادية على شكل جرافيت سداسى البنية إلى ماس تربط بين ذراته روابط تساهمية يوضع الجرافيت النقى فى مكبس قوى يصل ضغطه إلى مليون رطل على البوصة المربعة كما يمكن رفع درجة حرارة أسطوانة الضغط إلى درجات تصل إلى ٢٠٠٠ درجة مئوية عندما ينضغط الجرافيت فى حيز صغير جدا ، ويتحول حينئذ إلى ماس .

٤ - طريقة التنمية من المصهور : Growing from the melt

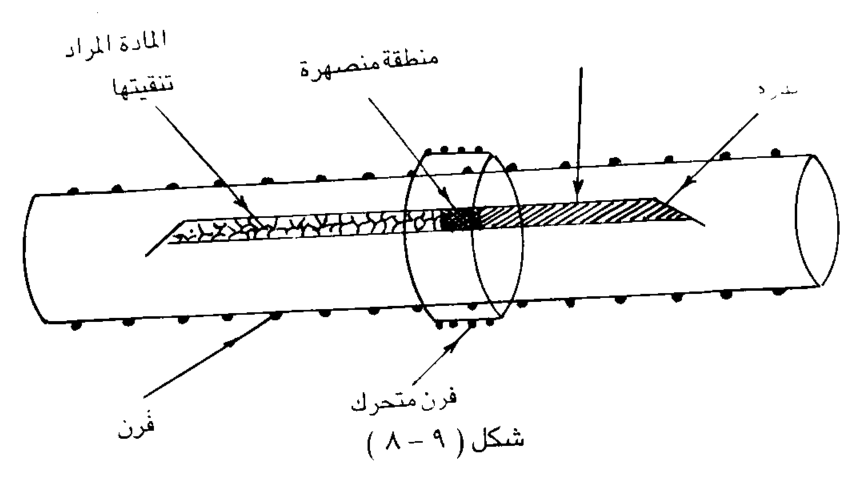
تعتمد هذه الطريقة على غمس بذرة بلورة seed crystal فى مصهور المادة ، ثم بسحبها إلى أعلى ببطء شديد (سرعة حوالى ٢٠ سم فى اليوم) تترتب الذرات عند تجمدها على بذرة البلورة بنفس الترتيب كما فى البذرة ، ونحصل فى النهاية على بلورة كبيرة أحادية single crystal . كما فى شكل (٩ - ٧)



شكل (٩ – ٧)

٥ – طريقة الصهر النطاقي zone - melting method :

توضع المادة المتعددة الحبيبات poly - crystalline فيما يشبه قارب من الجرافيت شكل (٩ – ٨) وتوضع عند طرف المادة بذرة البلورة المراد الإنماء عليها . حول القارب يوجد فرن يرفع درجة الحرارة إلى درجة أقل قليلا من نقطة الانصهار للمادة . ثم بواسطة



شكل (٩ – ٨)

فرن صغير آخر يمكن أن ترفع درجة الحرارة فى منطقة صغيرة من القارب إلى درجة أعلى قليلا من نقطة الانصهار أى أن هذه المنطقة الصغيرة تتحول إلى مصهور . عند تحريك الفرن الصغير ببطء شديد من ناحية البذرة إلى الطرف الآخر للمادة ، فإننا نحرك المنطقة المنصهرة كذلك ببطء ، وبذلك نعطى الفرصة للذرات لكى تتجمهد عند اتصال المادة بالبذرة بنفس الترتيب المنتظم لها ، وبذلك نحصل فى النهاية على بلورة أحادية من المادة .

السبائك ALLOYS :

فى هذا الجزء نناقش ماذا يحدث عند إدخال كمية من عنصر فى عنصر آخر ، أى عند تكوين الإشابات والسبائك . لقد وجد هيوم ورذرى Hume - Ruthery إنه إذا أضيف عنصر B لعنصر آخر A تتشوه شكل الشبيكة لذوبان B فى A ، وتعتمد درجة الذوبان على الفرق بين نصف قطرى الذرتين . إذا شغلت الذرة B نقط الشبيكة كما الـذرة A ، يقال عن الإشابة أنها تبادلية substitutional alloy ، وإذا كان نصف قطر الذرة المذابة أقل من ٦٠ ٪ من الذرة المذيبة شغلت الذرات المذابة مواقع الفراغات البينية فى الشبيكة interstitial sites ، ويقال عندئذ عن الإشابة إنها محلول بينى جامد Interstitial solid solution . (محلول جامد تخللى) .

تتوقف درجة ذوبان B فى A على الطاقة الحرة للنظام ، فتكون الإشابة فى حالة مستقرة إذا كانت الطاقة الحرة أقل ما يمكن ، وتكتب هذه القاعدة على الصورة الترموديناميكية :

$$d\,F = d\,(E - T\,S) = 0$$

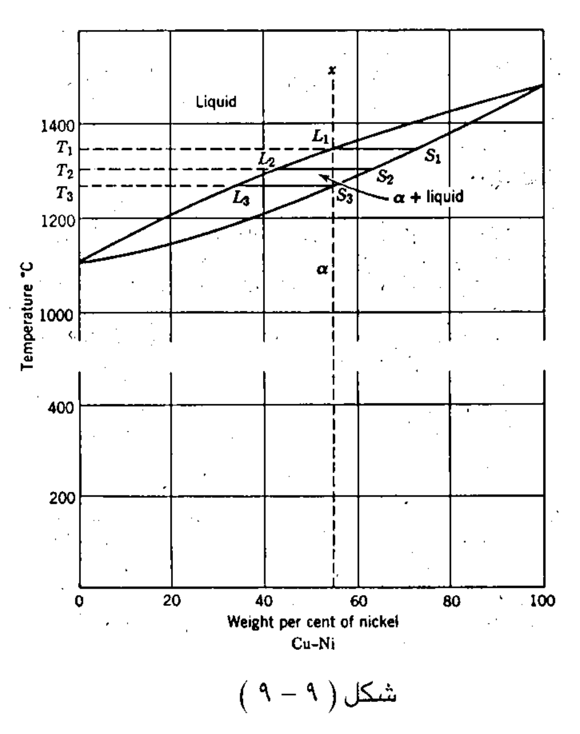
ويلزم مقدار من الطاقة Q لتحريك الذرات والوصول إلى أقل طاقة حرة F فى النظام ، وتسمى هذه بطاقة التنشيط activation energy

وتكون سرعة التفاعل هى :

$$r = A\,e^{-Q/RT}$$

حيث A ثابت ، R هو ثابت الغاز .

يمكن بالحساب تعيين البنية التركيبية للإشابة أو للسبيكة فى حالة الاتزان عند درجة حرارة معينة . ويسمى منحنى العلاقة بين درجة تركيز المذاب فى المذيب عند درجات الحرارة المختلفة بمنحنى الطور phase diagram . وفيما يلى نعتبر الحالة السهلة التى يكون فيها الذوبان تاما بين العنصرين B & A ، كما فى حالة النحاس والنيكل المبينة بشكل (٩ – ٩) . المنطقة بين المنحنين تمثل حالة الاتزان بين الجامد والسائل ، ويطلق على المنحنى العلوى liquidus والسفلى solidus ، وبينهما يتزن الطوران الجامد والسائل



شكل (٩ – ٩)

قاعدة ليفر The Lever Rule :

تبين قاعدة ليفر النسبة بين أى طورين فى إشابة ، إذا علم تركيب الطورين وتركيب السبيكة .

شكل (٩ – ١٠)

نفرض أن المركبتين A & B (شكل ٩ - ١٠) لهما التركيز C & C - 1 على الترتيب.

نفرض أن الإشابة تتركب من طورين (١) & (٢) حيث تركيز المركبة A هو C_1 & C_2 على الترتيب .

نفرض أن نسبة الطور (١) فى الإشابة هو x وعلى ذلك تكون نسبة الطور (٢) هو (1 - x) . ولإيجاد قيمة x بدلالة تركيز الطورين وتركيز الإشابة (C , C_1 , C_2) نفرض أن وزن السبيكة كلها W ، يكون وزن المركبة A هو CW ويكون وزن A فى الطور (١) هو $x C_1 W$ ووزنه فى الطور (٢) هو $(1 - x) C_2 W$

ولكن

$$C W = x C_1 W + (1 - x) C_2 W$$

أى أن :

$$x = \frac{C - C_2}{C_1 - C_2} = \frac{m}{l}$$

$$1 - x = \frac{C_1 - C}{C_1 - C_2} = \frac{n}{l}$$

$$\frac{x}{1 - x} = \frac{C - C_2}{C_1 - C} = \frac{m}{n}$$

وتعبر المعادلات السابقة عن قاعدة ليفر .

تحضير بلورات غاية فى النقاء بتكرار الصهر النطاقى :

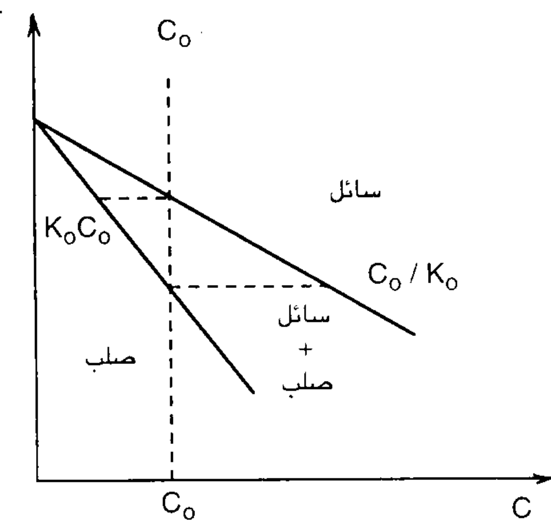
يؤثر وجود الشوائب فى المواد الصلبة على خواصها بدرجة كبيرة ، فمثلاً درجة النقاء ٩٩,٩ ٪ تجعل المسافة بين كل ذرتين شائبتين لا تزيد عن ثماني أو عشر مسافات ذرية . ولذلك من المهم الحصول على درجات نقاء تقدر بخمس تسعات ٩٩,٩٩٩ ٪ او اكثر ، ويستخدم لذلك طريقة الصهر النطاقى المستخدمة فى تحضير البلورات الأحادية .

من المعروف أن وجود المذيب فى السبائك الثنائية يرفع أو يخفض من درجة تجمد

المذاب

نفرض أن نقطة تجمد المذيب قد إنخفضت نتيجة لإدخال المذاب يكون شكل منحنى الطور كما مبين بشكل (٩-١١)

حيث K_0 هو معامل توزيع المذاب ، ويعرف بأنه النسبة بين تركيز المذاب فى المادة الصلبة إلى التركيز فى السائل .



شكل (٩ - ١١) يبين تغير تركيز المذاب مع درجة الحرارة

$(K_0 < 1)$

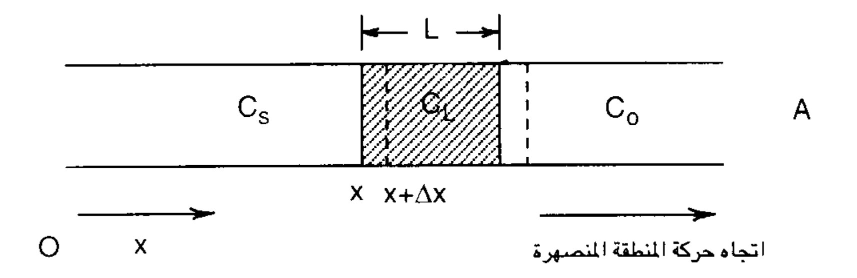
إذا ما تجمد مثل هذا المحلول C_0 فإن تركيز المذاب يكون أكبر ما يمكن فى الأجزاء السائلة قبل أن تتجمد . أى أن الشوائب المذابة تفضل أن تبقى فى الحالة السائلة عنها فى الحالة الصلبة .

فعند السطح الفاصل بين المصهور والجامد تختلف نسب توزيع الشوائب بين الطورين، ويطلق اسم معامل التوزيع K_0 على النسبة بين تركيز الشوائب المذابة C_S فى الجزء الذى تجمد إلى تركيزها فى الجزء السائل C_L . أى أن

$$K_0 = C_S / C_L$$

وتتوقف قيمة K_0 على كل من المادة المذيبة والشوائب المذابة ، وكذلك على درجة حرارة السطح الفاصل بين الجامد والسائل . ومعدل التجمد . فمثلا إذا كان $K_0 = 0.5$ تكون نسبة تركيز الشوائب فى طور السائل إلى نسبتها فى الطور الجامد هى ٢ : ١ .

إذا تحرك السطح الفاصل بين السائل والجامد ، فإن الشوائب تفضل تلقائيا التواجد فى منطقه السائل، وبذلك يقل تركيزها فى منطقة الجامد .



شكل (٩ - ١٢) حركة منطقة منصهرة على قضيب منتظم المقطع A .

نفرض قضيباً منتظم المقطع وأن L هو طول منطقة صغيرة منصهرة من القضيب تتحرك بواسطة فرن متحرك من اليسار إلى اليمين شكل (٩ - ١٢) . ونفرض أن $K_0 < 1$. كلما تقدمت المنطقة المنصهرة يزداد تركيز الشوائب فى المصهور ويصبح C_0 / K_0 ، بينما يقل تركيز الشوائب فى الجامد ويصير $C_0 \; K_0$.

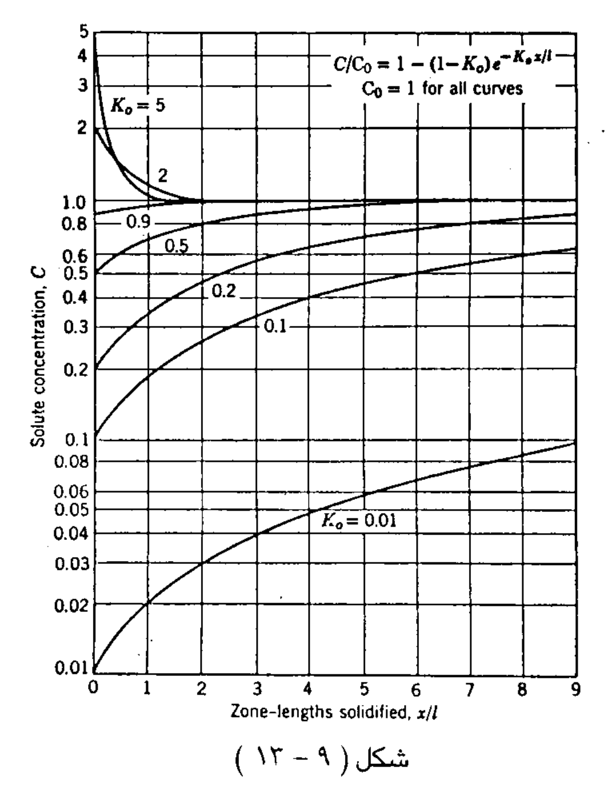
نفرض أن تركيز الشوائب فى الجامد عند النقطة x على القضيب هى $C_S(x)$ ، وأن تركيز الشوائب في المنطقة المنصهرة هى $C_L(x)$ وأن C_0 هو تركيز الشوائب فى البداية قبل تحريك المنطقة المنصهرة .

نفرض أن المنطقة المنصهرة تحركت مسافة Δx إلى اليمين . كمية الشوائب فى المنطقة بعد الإزاحة $= L A \; C_L(x + \Delta x)$.

وتساوى هذه الكمية الشوائب فى المنطقة قبل الإزاحة ناقص الكمية التي تجمدت على اليسار بالإضافة إلى تلك التى انصهرت فى المنطقة على اليمين . وبإيجاد المعادلة التفاضلية مع اعتبار Δx تؤول للصفر وإن $C_L(x = 0)$ تساوى C_0 نجد أن :

$$C_S(x) = C_0 - C_0 \, (1 - K_0) \, e^{-K_0 x / L}$$

ويبين شكل (٩ - ١٣) رسما بيانيا للمعادلة السابقة لقيم مختلفة من K_0 مع اعتبار $C_0 = 1$. ويبين كل منحنى تغير تركيز الشوائب المذابة مع النسبة بين طول جزء القضيب الذى مرت عليه المنطقة المنصهرة (x) إلى طول المنطقة المنصهرة (L) ، وذلك لمرور واحد للمنطقة المنصهرة .



شكل (٩ - ١٢)

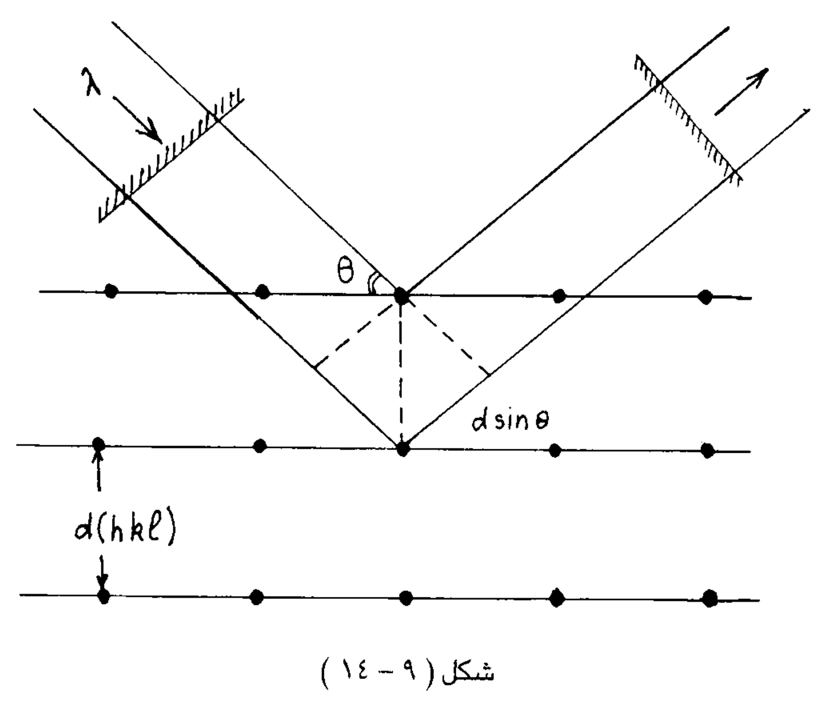
يتبين من الشكل أنه كلما كانت K_0 صغيرة تتم تنقية الشوائب بدرجة كبيرة بمرور المنطقة المنصهرة ، ويمكن زيادة درجة النقاء بإعادة إمرار المنطقة المنصهرة ، ويراعى أن تكون دائما فى نفس الاتجاه .

إيجاد التركيب البلورى بواسطة أشعة Structure analysis X :

. فى عام ١٩١٢ اختبر لاوا Laue ظاهرة تداخل الضوء باستخدام أشعة X بدلا من الضوء المنظورمع استخدام بلورة أحادية بدلا من محزوز الحيود diffraction grating اعتمادا على أن الطول الموجى للأشعة السينية يتراوح بين ٠.٠١ ، ١٠ انجستروم وأن البعد البينى للذرات فى البلورة يصل لبضعة إنجستروم قليلة .

عندما تسقط الأشعة السينية على أى ذرة متعادلة يتسبب المجال الكهرومغناطيسى

المتردد فى إحداث استقطاب متردد أيضا داخل الذرة . تعمل الذرات فى هذه الحالة كمتذبذبات كهربائية electric oscillators وتشع نفس التردد مثل الموجة الساقطة .



شكل (٩ - ١٤)

اعتبر البلورة كأنها رصة من المستويات الذرية المتتالية شكل (٩ - ١٤) .

يستطيع كل مستوى أن يعكس جزءاً من الأشعة الساقطة .

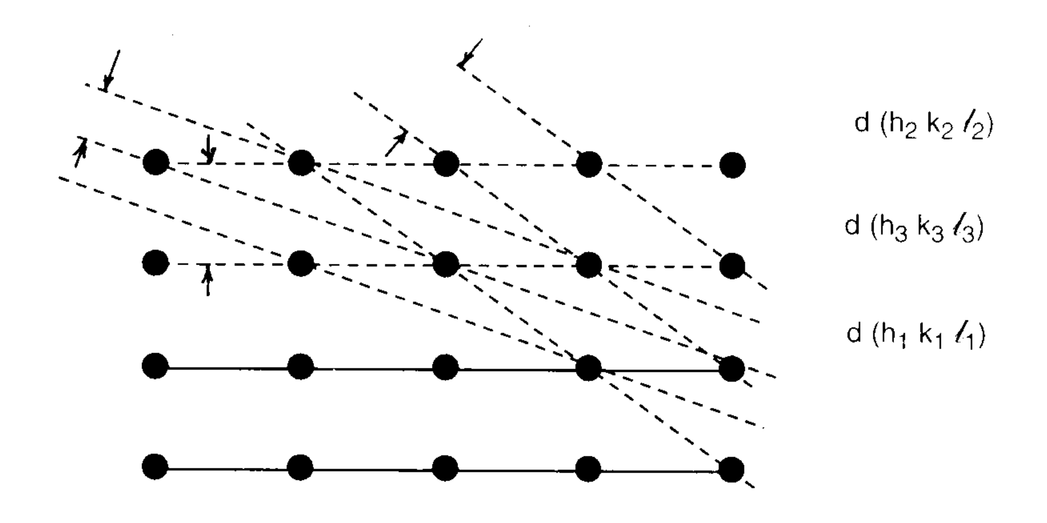
إذا كانت المستويات متساوية البعد عن بعضها بمقدار $d(h\,k\,\ell)$ سم فإن الفرق فى طول المسار لتلك الأشعة المنعكسة على المستويات المتعاقبة هو $2\,d(h\,k\,\ell)\sin\theta$

حيث $(h\,k\,\ell)$ هى معاملات ميللر لهذه المجموعة من المستويات .

وبتطبيق نظرية التداخل فإن الاشعة المنعكسة تتداخل وتقوى بعضها البعض إذا كان الفرق فى طول المسار هو :

$$2\,d(hkl)\sin\theta = n\,\lambda$$

وهو ما يعرف بقانون براج للتداخل الإنشائى Constructive



شكل (٩ – ١٥) يبين المستويات الذرية المختلفة

شكل (٩ – ١٥) يبين المستويات الذرية المختلفة

مما سبق يتضح أنه باستخدام أشعة سينية لها طول موجة احادى اللون λ « mono-chromatic radiation » معلومة القيمة يمكننا بدراسة انعكاس هذه الأشعة على البلورة أن نوجد مقدار المسافات (d (h k l بين المستويات الذرية المختلفة ، وبعدها نستطيع تعيين الترتيب الذرى فى وحدة الخلية (انظر شكل (٩ – ١٥) .

عند تعيين التركيب البلورى عمليا يجب أن نمر بالخطوات التالية :

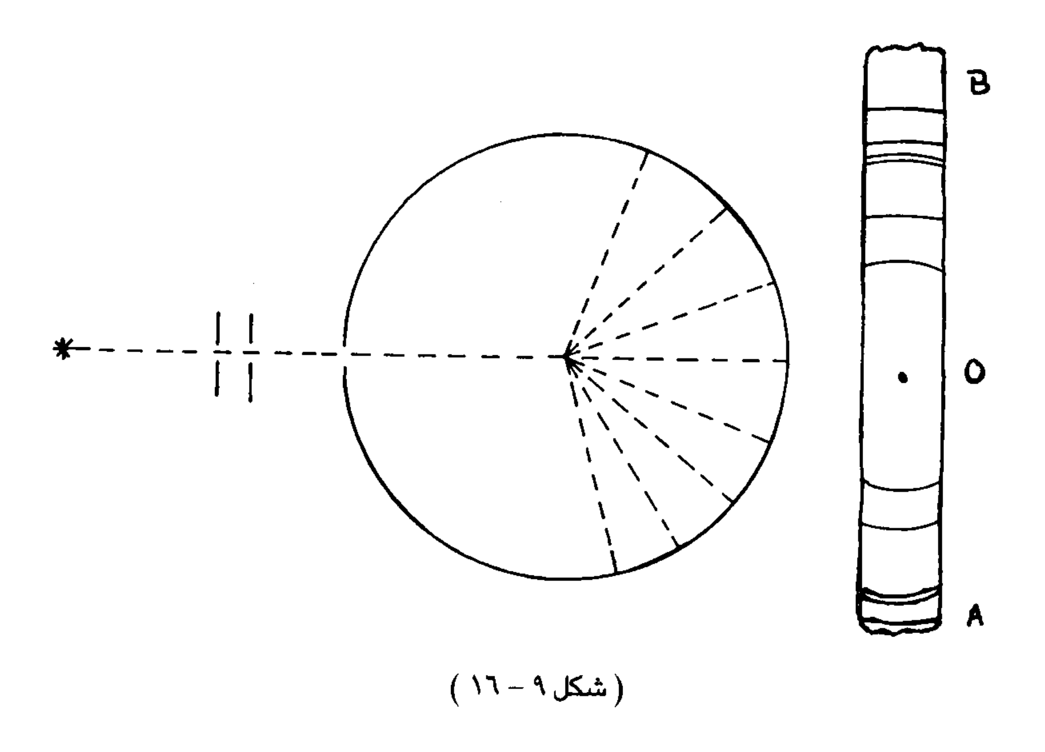
أ – إذا وجدت بلورة كبيرة macroscopic للمادة نحدد لها الزاويا الواقعة بين أحرفها التى تقاطع المستويات الأساسية لوحدة الخلية فيها .

ب – باستخدام الأشعة السينية نوجد أبعاد وحدة الخلية بدراسة هندستها الفراغية مع معرفة الأبعاد العمودية بين المستويات الذرية (d (hkl .

جـ – يمكن تعيين عدد الذرات فى وحدة الخلية ، وذلك بمقارنة شدة الانعكاس على المستويات المختلفة باستخدام ميكروفوتومتر . فالمستويات ذات الكثافة السطحية الكبيرة

تعطى شدة انعكاس أكبر فتعطى أثرا أكبر على الفيلم ، وبالتالى تكون الخطوط أكثر سواداً، شكل (٩ – ١٦) .

د – تجرى بعد ذلك محاولات لترتيب عدد الذرات فى وحدة خلية ، بحيث تعطى نفس مستويات التماثل فى البلورة . فى الحالات البسيطية يكون من السهل إيجاد الترتيب الذرى الوحيد الذى يعطى الشكل البلورى .



(شكل ٩ – ١٦)

إيجاد طاقة الشبيكة للبلورات الأيونية :

تتكون البلورة الأيونية إذا انتقل إلكترون من ذرة من نوع معين إلى ذرة مجاورة من نوع آخر . وتسمى الرابطة بينهما رابطة أيونية ، إذ تتسبب عملية الانتقال هذه فى جعل الذرة الأولى أيونا موجباً ، بينما تصير الذرة الثانية أيونا سالباً . ولكى تحتفظ البلورة بتعادلها الكهربى تترتب أيونات البلورة ، بحيث تتعاقب دائما الأيونات السالبة والموجبة فى

أى اتجاه داخل البلورة ، وعلى ذلك تكون البنية تكعيبية بسيطة . ومثال البلورات الأيونية كلوريد الصوديوم وفلوريد الليثيوم .

التركيب الإلكترونى للكلور وللصوديوم هو :

$$\text{Na} \quad 1s^2 \quad 2s^2 \quad 2p^6 \quad 3s^1$$

$$\text{C}\ell \quad 1s^2 \quad 2s^2 \quad 2p^6 \quad 3s^2 \quad 3p^5$$

وعلى ذلك إذا انتقل الكترونا من ذرة الصوديوم إلى ذرة الكلور تتشبع قشرتا كل منهما ويسعدا بذلك الجوار مكونين رابطة أيونية قوية أساسها التجاذب الكولومى بين الأيونين ، وبالمثل بالنسبة لفلوريد الليثيوم $Li^+ \; F^-$.

يمكننا اعتبار أن توزيع الشحنة حول الأيونات توزيعا كريا متماثلا ، فيما عدا تشوه بسيط بالقرب من نقط التلامس بين الأيونات كما سنفرض أن طاقة الشبيكة فى البلورات الأيونية تعود إلى القوى الكولومية بين الأيونات .

يمكن إيجاد قيمة تقريبية لطاقة الشبيكة كما يلى :

فى حالة كلوريد الصوديوم $Na^+ \; C\ell^-$

المسافة بين أيوني الصوديوم والكلور فى الشبيكة = $r_0 = 2.81 \; {}^\circ A$

طاقة الموضع التجاذبية بين الأيونين = $P.E = e^2 / r_0$

$$\therefore \; P.E = (4.8 \times 10^{-10})^2 / (2.81 \times 10^{-8})$$

$$= 8 \times 10^{-12} \text{ ergs}$$

$$\cong 5 \text{ ev}$$

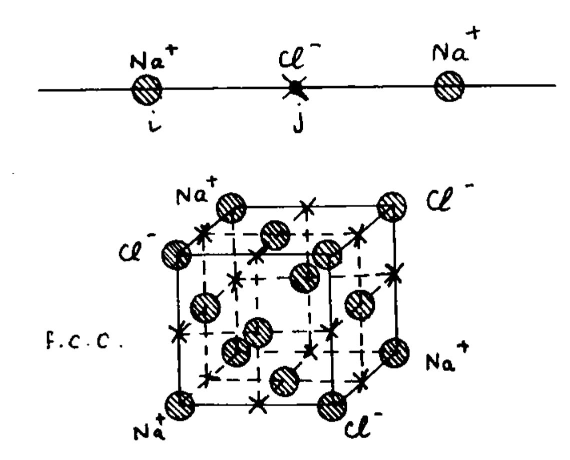
وتقترب هذه القيمة التقريبية من القيمة المقاسة معمليا ، وهى 8 ev / molecule وهى قيمة حرارة التكوين Heat of Formation للبلورة ، وتساوى 183 Kcal / mole .

حساب طاقة الشبيكة الأيونية :

اعتبر شبيكة من كلوريد الصوديوم تكعيبية متمركز الوجه

توجد أيونات الكلور والصوديوم متعاقبة فى نقط الشبيكة .

لكل أيون أقرب ستة جيران مختلفة عنه فى الشحنة ، بينما له ١٢ جار من نفس شحنته (انظر شكل ٩-١٧) .



شكل (٩ – ١٧)

اعتبر أيونين i & j .

الطاقة الكلية لكل أيون هى :

$$\phi_i = \sum_j^{*} \phi_{ij}$$

ويشمل الجمع كل الأيونات فيما عدا بالطبع i = j وهذا هو معنى وضع نجمة فوق علامة الجمع .

ϕ_{ij} تمثل الطاقة الكولومية الناشئة عن التجاذب والتنافر بين الأيونات وتعطى بالمعادلة: (معادلة مى Mie's equation)

$$\phi_{ij} = \pm \frac{e^2}{r_{ij}} + \frac{\lambda}{r_{ij}^n} \qquad (1)$$

والإشارات السالبة والموجبة لتبين الفعل بين الشحنات المتماثلة والشحنات المختلفة ، والثوابت n & λ تتحدد قيمتهما من قياس ثابت الشبيكة وإنضغاطيتها .

اعتبر شبيكة مكونة من (2 N) أيونات

طاقة الشبيكة U_0 هى :

$$U_0 = N \phi_{ij}$$

وهنا اعتبرنا الفعل البينى بين أزواج الأيونات عند حساب طاقة الموضع ، كما اعتبرنا أن الطاقة الكلية للشبيكة هى الطاقة اللازمة لتفكيك بنية البلورة ، لتصبح أيونات حرة بينها مسافات لا نهائية .

نفرض أن R هى المسافة بين أقرب جارين فى البلورة . تكون المسافة بين الأيونين i

j & هى :

$$r_{ij} = P_{ij} \cdot R \quad (2)$$

وبالتعويض فى المعادلة (١)

$$\therefore \ \phi_{ij} = \pm \frac{1}{P_{ij}} \cdot \frac{e^2}{R} + \frac{\lambda}{P_{ij}^n \ R^n}$$

وبتجميع فعل كل جيران الأيون j تكون الطاقة :

$$\phi = - \frac{\propto e^2}{R} + \frac{\lambda A_n}{R^n} \quad (3)$$

حيث

$$A_n = \sum^{*} P_{ij}^{-n}$$

$$\propto = \sum^{*} (\mp) P_{ij}^{-1}$$

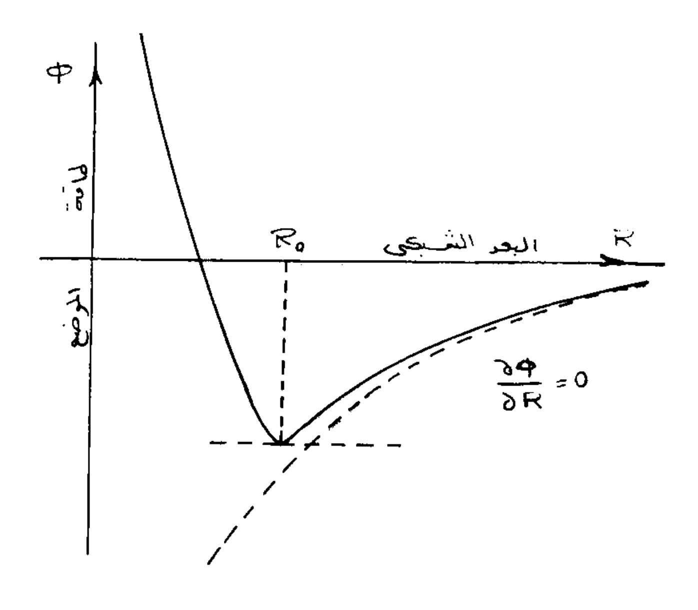
حساب قيمة $\propto$:

يعرف $\propto$ بأنه ثابت ماديلنج ويميز البنية البلورية . ويبين شكل (٩ – ١٨) رسما بيانيا لتغير طاقة الموضع مع المسافة بين الأيونات .

عند وضع الاتزان أى عند أى نقطة من نقاط الشبيكة تكون $\frac{\partial \phi}{\partial R} = 0$

ويمفاضلة المعادلة (٣) بالنسبة للمسافة R ومساواة الناتج بصفر نحصل على :

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{\propto e^2}{R_0^2} - \frac{n A_n \lambda}{R_0^{n+1}} = 0 \quad (4)$$



شكل (٩ – ١٨)

وبحذف $\lambda\ A_n$ من معادلتى (٣) و (٤) نحصل على :

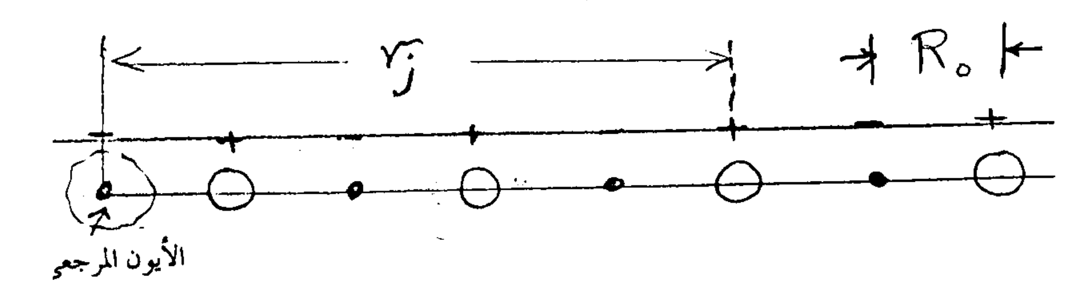
$$\phi = - \frac{\propto e^2}{R_0} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \tag{5}$$

وتكون الطاقة الكلية للشبيكة البلورية المكونة من عدد $2\ N$ أيونات عندما تكون الأيونات مستقرة فى نقاط الشبيكة هي :

$$U_0 = - N \frac{\propto e^2}{R_0} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \tag{6}$$

وقد أمكن لماديلنج حساب ثابت الطاقة الكولومبية $\propto$ باعتبار شبيكة خطية ثنائية ، كما فى شكل (٩ – ١٩) حيث R_0 هي المسافة بين أيونين متجاورين .

اعتبر الأيون السالب المبين بالشكل أيونا مرجعيا ، بعد الأيون j عنه هو r_j وستعرفه الإشارة $\pm$ وفقا لشحنته .



شكل (٩ – ١٩)

بحذف P_{ij} من المعادلة (٢) نحصل على ثابت ماديلنج على الصورة

$$\frac{\propto}{R_0} = \sum \frac{(\pm)}{r_j}$$

$$= 2\left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{3R_0} - \frac{1}{4R_0} + \ldots\right]$$

والمعامل 2 فى المعادلة لأننا اعتبرنا r_j دائما موجبة ، وأن هناك أيونين لهما نفس البعد من الأيون المرجعي .

$$\therefore \propto = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\right)$$

وبمعرفة أن :

$$\ell n\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

وبوضع $x = 1$ نحصل على :

$$\ell n\ 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

وعلى ذلك يكون :

$$\propto = 2\ \ell n\, 2$$

$$\cong 1.4$$

وهذه القيمة صالحة للشبيكة الخطية ثنائية الذرة ، أما فى حالة البلورات الحقيقية ثلاثية الأبعاد فيحتاج حساب ∝ إلى مشقة أكبر ، وقد وجد إيفان أن قيمتها تساوى تقريبا

: 1.75 $\cong$ $\propto$ بالنسبة لبلورة ثلاثية البعد ، وهذه قيمة قريبة جدا من قيمة $\propto$ المقاسة لبلورة كلوريد الصوديوم Na Cl وهى :

$$\propto = 1.747558$$

حساب قيمة n :

n فى معادلة مى هو الأس فى الحد الثانى الخاص بالجهد الناشىء عن الفعل البينى السالب للأيونات . من الديناميكا الحرارية :

$$K = -\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right) \qquad (7)$$

حيث K الانضغاطية وهى مقلوب معامل المرونة الحجمى للمادة .

من القانون الأول للديناميكا الحرارية

$$d\phi = dU + p\,dv$$

عند درجات الحرارة المنخفضة يمكن إهمال التأثيرات الحرارية ، وبذلك يكتب القانون الأول على الصورة :

$$dU = -p\,dv$$

$$\frac{\delta U}{\delta v} = -p$$

$$\frac{\delta^2 U}{\delta v^2} = -\frac{\delta p}{\delta v}$$

$$\therefore \frac{1}{K} = v\left(\frac{d^2U}{dv^2}\right)$$

إذا كانت R المسافة بين الأيونين فى بلورة Na Cl ، يكون حجم الخلية R^3 ، وتحتوى الخلية على جزىء واحد أى على عدد ٢ أيون فإذا كان فى البلورة عدد N جزىء يكون الحجم هو :

$$V = 2NR^3 \qquad (8)$$

ويمفاضلة الطاقة U بالنسبة للحجم :

$$\therefore \quad \frac{dU}{dv} = \frac{dU}{dR} \cdot \frac{dR}{dv}$$

وبالمفاضلة بالنسبة للحجم مرة ثانية :

$$\therefore \quad \frac{d^2U}{dv^2} = \frac{dU}{dR} \cdot \frac{d^2R}{dv^2} + \frac{d^2U}{dR^2}\left(\frac{dR}{dv}\right)^2 \qquad (9)$$

عند وضع التوازن ، أى عند نقطة الشبيكة $R = R_0$

$$\frac{dU}{dR} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2U}{dv^2} = \frac{d^2U}{dR^2}\left(\frac{dR}{dv}\right)^2$$

وبإيجاد $\frac{dR}{dv}$ من معادلة (8) نحصل على :

$$\left(\frac{dR}{dv}\right)^2 = \frac{1}{36\,N^2\,R^4} \qquad (10)$$

وبالتعويض فى المعادلة (7) نحصل على :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{18\,N\,R_0}\left(\frac{d^2U}{dR^2}\right)_{R=R_0} \qquad (11)$$

وباستخدام معادلة الطاقة رقم (3)

$$\therefore \ \phi\ (\text{or } U) = N\left[\frac{\lambda A_n}{R^n} - \frac{\propto e^2}{R}\right]$$

وبمفاضلة U مرتين بالنسبة إلى R نحصل على :

$$\frac{d^2U}{dR^2} = N\left[\frac{n\,(n+1)\,A_n \cdot \lambda}{R^{n+2}} - \frac{2 \propto e^2}{R^3}\right]$$

وعند الاتزان ومن معادلة (4)

$$\frac{\propto e^2}{R_0^2} - \frac{n\,A_n\lambda}{R_0^2} = 0$$

وبحذف $A_n.\lambda$ نحصل على :

$$\left(\frac{d^2U}{dR^2}\right)_{R=R_0} = \frac{N(n-1)\propto e^2}{R_0^2}$$

وبالتعويض فى المعادلة (11) نحصل على :

$$\frac{1}{K} = \frac{(n-1)e^2 \cdot \propto}{18 R_0^4} \qquad (12)$$

من هذه المعادلة يمكن حساب n بمعرفة K ، e ، R_0 كما إننا سبق أن أوجدنا ثابت مادلنج $\propto$.

بالنسبة لبلورة من كلوريد الصوديوم Na Cl

$K = 3.3 \times 10^{-12}\ cm^2 / dyn.$; $\propto = 1.747558$

$R_0 = 5.63 \times 10^{-8}\ cm$; $e = 1.6 \times 10^{-12}$ Coul .

$$\therefore\ n = 1 + \frac{18 R_0^4}{K\ e^2 \propto} = 9.4$$

وبحساب طاقة الشبيكة نجدها تساوى 183.1 Kcal / mole ، بينما القيمة المقاسة معمليا هى 182.8 Kcal / mole .

مسائل على الباب التاسع

١ – تتغير طاقة الموضع $V(x)$ لذرتين فى جزىء ثنائى مع المسافة x بينهما وفقا للمعادلة :

$$V(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}}$$

حيث a , b ثوابت موجبة ، شكل (٩ – ٢٠)

أ – أوجد قيمة x عندما تكون الطاقة $V(x)$ صفرية .

ب – ماذا تكون قيمة x لأقل طاقة ؟

جـ – أوجد القوة بين الذرات ؟

د – ما هى طاقة التحلل للجزىء ؟

الحل :

أ –

$$V(x) = 0 = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}}$$

$$(x)_{v=0} = \sqrt[6]{a/b}$$

ب – عندما يكون :

$$\frac{d}{dx}\left[V(x)\right] = 0$$

تكون قيمة الطاقة أقل ما يمكن :

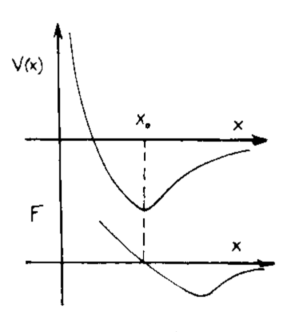
$$-\frac{12a}{x^{13}} + \frac{6b}{x^{7}} = 0$$

$$x = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$

جـ – القوة بين الذرتين :

$$F = -\frac{dV}{dX}$$

$$= \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^{7}}$$



شكل ٩ – ٢٠

وتكون **هذه القوة صفرية** عندما تكون المسافة :

$$X = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$

أو

$$X = \infty$$

ويلاحظ أن القوة تكون موجبة ، أى أن الذرتين تتنافران قبل ،

$$X = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$

بينما **تكون القوة** سالبة بعد ذلك ، حيث تتجاذب الذرتان عند فصلهما عن بعضهما إلى أبعد من ذلك .

د – **طاقة التحلل** هى الشغل اللازم لفصل الذرتين إلى مسافة لا نهائية . وتساوى :

$$D = V(\infty) - V(\min)$$

$$= 0 - \left(\frac{a}{4a^2/b^2} - \frac{b}{2a/b}\right)$$

$$= \frac{b^2}{4a}$$

ويلاحظ أن الجزىء يتحلل بمجرد أن تصل طاقة حركة الذرات فى قاع بئر الجهد إلى قيمة أكبر من D .

٢ – أوجد الكثافة النسبية للرص فى الخلايا التكعيبية الآتية :

b . c .c ; s . c . ; f . c . c ;
diamond

٣ – إذا كانت المسافة بين أيونى البوتاسيوم والكلور فى جزىء $KC\ell$ هى 2.8×10^{-10} m . أوجد قوة التجاذب بينهما وكذلك طاقة الموضع بالإلكترون فولط .

٤ – أثبت أنه فى البنية التكعيبية متمركزة الجسم b .c . c يكون نصف قطر أكبر ذرة يمكن أن تشغل الفراغة irregular tetrahedral void هو 0.291 R ، وتلك التى يمكن أن تشغل الفراغة octahedral void ، هو 0.154 R حيث R نصف قطر ذرة الجسم .

٥ – أوجد كثافة السيليكون إذا كان البعد الشبيكى 5.43×10^{-8} cm ، وأنه يتبلور على الشكل الماسى .

٦ – المطلوب تحضير بلورة أحادية من السيليكون مع إدخال 10^{16} ذرة / سم٣ من الفوسفور :

أ – ماذا يجب أن يكون تركيز الفوسفور فى المصهور الابتدائى لنحصل على هذا التركيز من الفوسفور فى البلورة ، علما بأن معامل التوزيع K_o بين الفسفور والسيليكون هو $K_o = 0.35$

ب – وإذا كانت كمية السيليكون الابتدائية فى البوتقة هى 5 Kg ، فكم من الجرامات من الفوسفور يجب إضافتها ؟

الوزن الذرى للفسفور = 31

عدد افوجادرو = 6.02×10^{23}

الحل :

أ – اعتبر $C_s = K_0 \; C_\ell$ أثناء نمو البلورة التركيز الابتدائى فى المصهور هو :

$$\frac{10^{16}}{0.35} = 2.86 \times 10^{16} \; / \; cm^3$$

ب – بما أن تركيز الفوسفور صغير جدا يمكن اعتبار أن :

حجم المصهور كله للسيليكون . من التمرين السابق كثافة السيليكون

$2.33 \; g \; / cm^3$

حجم المصهور يساوى $V = \dfrac{5000}{2.33}$

$= 2146 \; cm^3 \; Si$

عدد ذرات الفسفور $\therefore \; 2.86 \times 10^{16} \times 2146 = 6.14 \times 10^{19}$

عدد الجرامات من الفسفور هى :

$$\frac{6.14 \times 10^{19} \times 31 \; g / mole}{6.02 \times 10^{23} \quad atom \, s / mole} = 3.16 \times 10^{-3} \; gm$$

٧ – وضح بالرسم كيف يمكن تمثيل البنية التكعيبية متمركزه الجسم b c c على أنها بنيتين تكعيبتين بسيطتين متداخلتين . وضح بالرسم الاتجاه < 100 > فى الشبيكة .

٨ – بلورة سيليكون تسحب من المصهور ومطعمه بالبورون $(K_0 = 0.8)$ اذا كان وزن السيليكون ١ كيلو جرام أوجد كم جراما من البورون يجب اضافتها ليكون تركيز الشوائب $10^{15} \; / \; cm^3$

٩ – عند اتحاد ذرة صوديوم مع ذرة كلور لتكوين كلوريد الصوديوم تعطى ذرة

الصوديوم الكترونا لذرة الكلور . ما هو التركيب الالكترونى لكل من الايونين المتكونين ؟

١٠ - اذا علم أن البعد الشبيكى لبلورة تكعيبية هو $a = 2.62\ ^\circ A$ ما هى الزوايا التى ينعكس شعاع من الأشعة السينية طول موجته $\lambda = 1.54\ ^\circ A$ على المستويات : (210) . (200) , (111) , (110) , (100)

١١ - لأكسيد الزنك بنية سداسية حيث $a = 3.2492\ ^\circ A$ ، $c = 5.2069\ ^\circ A$ وكثافته $D = 5.73 \times 10^3\ Kg / m^3$.

كم عدد ذرات الزنك والأكسجين تحتويها وحدة الخلية ؟

١٢ - في تجربة لاوا لحيود الأشعة السينية لمسحوق كلوريد السيزيوم $Cs\ Cl$ استخدمت أشعة $Cu\ K\alpha$ طول موجتها $\lambda = 1.54\ ^\circ A$ ، ووجد أن زوايا براج لخطوط الحيود الأولى هى :

10.72^0 , 15.31^0 , 18.88^0 , 20.91^0 , 24.69^0 , 27.24^0

أوجد معاملات ميلر للإنعكسايات السابقة ، ،احسب طول البعد الشبيكى a علماً بأن بلورة Cs Cl تكعيبية .

١٣ - قضيب من النيكل يحتوى 0.1% بالوزن نحاس : يراد تنقيته بطريقة الصهر النطاقى . أوجد اقصى درجة نقاء يمكن الحصول عليها وكذلك عدد مرات المرور على القضيب علما بأن طول المنطقة المنصهرة عشرطول القضيب . (K =0.5)

١٤ - تحتاج عملية النمو الحبيبى grain grpwth فى مادة متعددة الحبيبات إلى طاقة تنشيط قدرها (30 kcal per mole) . فإذا تمت العملية في ساعة واحدة عند الدرجة $500\ ^\circ C$. ماذا يكون زمن اتمامها عند درجة الصفر المئوى ؟

١٥ – باستخدام البيانات التالية حدد اذا كانت ذرات الكربون تذوب فى الحديد على صورة محلول جامد تبادلى أو تخللى . النسبة المئوية للكربون فى الاشابه = % 0.8 .

البنية التركيبية . f . c . c

البعد الشبيكى $a = 3.583\ ^{\circ}A$

كثافة الاشابة $P = 8142\ Kg\ m^{-3}$

١٦ – يظهر منحنى الطور للنحاس – نيكل ذوبانا تاما فى المحلول منهما . برد محلولان من Ni - Cu تركيزهما بالوزن Ni % 80 ، Ni % 10 . أوجد درجة تركيز الطور الجامد لكل عند بدء تكوينه .

١٧ – من الجدول التالى للأوزان الذرية at . wt والبعد الشبيكى a للعناصر أوجد كثافاتها :

∝ Fe	: at . wt. = 55.85	;	$a = 2.861\ ^{\circ}A$
Cu	: at . wt = 63.57	;	$a = 3.608\ ^{\circ}A$
Zn	: at . wt = 65.38	;	$a = 2.659\ ^{\circ}A$
			$c = 4.934\ ^{\circ}A$
dianond	: at . wt (c) = 12.01	;	$a = 3.560\ ^{\circ}A$

١٨ – أوجد الكثافة السطحية لكل متر مربع فى المستويات التالية :

(110) in ∝ Fe ; (111) in Cu ; (110) in Cu ; (0001) in Zn

١٩ – إذا علم أن البعد بين ايونى صوديوم وكلور فى شبيكة Na Cℓ هو $2.81 \times 10^{-10} m$ وأن نفاذية الفراغ $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$ أوجد طاقة الترابط لملح الطعام باعتبار أنها كولومية .

٢٠ - احسب طاقة الترابط لبلورة أيوديد الصوديوم Na I إذا علم أن مسافة أقرب جيران هى A° 3.24 . وإذا علم أن القيمة العملية لهذه الطاقة هى 162.3 Kcal / mde أوجد طاقة التنافر .

٢١ - يتبلور الحديد عند درجات الحرارة الأقل من 910 °C على الصورة .b . c . c ، ويتحول إلى الصورة f . c . c أعلى من هذه الدرجة . إذا اعتبرنا أن نصف قطر الذرة لا يتغير فى الحالتين فاحسب النسبة بين كثافتى الحديد للبنيتين .

الباب العاشر

الخواص الكهربائية للجوامد Electric Properties of Solids :

إذا أردنا ترتيب المواد الصلبة وتصنيفها من حيث معامل توصيله الكهربائى σ فإننا نجد أنواعا ثلاثة :

١ – مواد جيدة التوصيل الكهربائى وهى المواد المعدنية مثل النحاس ومعامل توصيله:

$\sigma = 10^{5} \quad ohm^{-1} \quad cm^{-1}$

٢ – أشباه موصلات مثل كبريتيد الرصاص Pb s ومعامل توصيله :

$\sigma = 1 \quad ohm^{-1} \quad cm^{-1}$

٣ – مواد رديئة التوصيل أو عازلة كهربائيا مثل الأبونيت ومعامل توصيله :

$\sigma = 10^{-16} \quad ohm^{-1} \quad cm^{-1}$

من قيم معاملات التوصيل السابقة يتضح مقدار التغير الضخم فى الصفات الكهربائية للمواد الصلبة المختلفة .

يعتمد التوصيل الكهربائى على وجود حاملات شحنة حرة free charge carriers . يمكن لها أن تتحرك تحت تأثير مجال كهربائى free charge carriers ، ولتفسير الخواص الكهربائية للجوامد نبدأ أو بالحالة البسيطة للعناصر أحادية التكافؤ .

النظرية الالكترونية فى الفلزات :

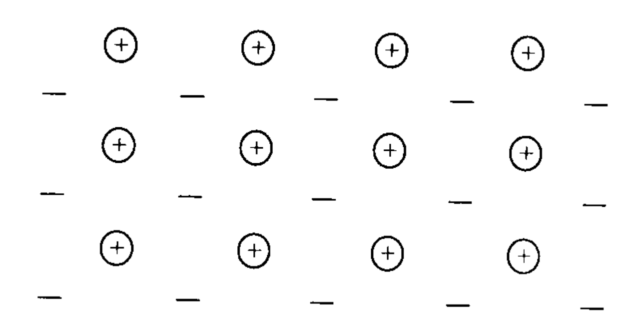
تطورت النظرية الإلكترونية للفلزات ومرت بثلاث مراحل :

أ – **النظرية الكلاسيكية للغاز الإلكترونى الحر** وقد وضعها درودى ولونتز عام ١٩٠٠ Drude & Lorentz وقد افترضا أن الفلزات تحتوى الكترونات حرة تخضع فى حركتها للقوانين الكلاسيكية للميكانيكا .

ب – **النظرية الكمية للإلكترون الحر** وقد وضعها سمر فيلد Sommerfeld

عـام ١٩٢٨ حـيث فـرض وجـوب خـضـوع الإلكـترونات الحـرة فى الفلزات للقـوانين الكمـيـة quantum laws .

جـ - **نظرية المناطق** : وبدأت بـ بلوخ Bloch عام ١٩٢٨ حيث اعتبرت حركة الإلكترونات فى مجال جهد دورى periodic potential field ناشىء عن الشبيكة .



شكل (١٠ - ١)

الغاز الإلكترونى يتخلل الأيونات فى الشبيكة :

أ - النظرية الكلاسيكية للإلكترون الحر

. صور دوردى لورنتز تركيب أى فلز على أنه رصه من الأيونات الموجبة يتخللها غاز من الإلكترونات الحرة تتوزع طاقاتها حسب قانون التوزيع لماكسويل شكل (١٠ - ١ ٩ . وقد افترضنا أن الألكترونات بالرغم من شحانتها السالبة تتصرف كجزيئات متعادلة لغاز تام . كما أهملا وجود المجال الدورى الذى تتحرك فيه الإلكترونات والذى يرجع إلى دورية الشبيكة.

وبالرغم من التبسيط الشديد لهذه الفروض إلا أن النظرية حققت نجاحا فيما يأتى : -

١ - **تحقيق قانون أوم** المعروف واثباته على أساس رياضى

٢ - اثبات صحة العلاقة العملية المعروفة **بقانون فيدمان وفرانز** والتى تنص على

أن النسبة بين التوصيل الكهربائى إلى معامل التوصيل الحرارى واحدة لكل الفلزات عند نفس درجة الحرارة .

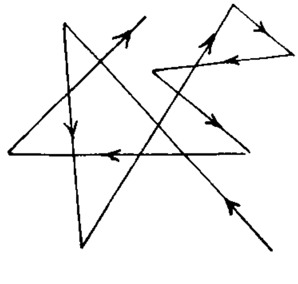
٣ - **تفسير سبب الاعتام واللمعة فى الفلزات** Luster & opacity يستطيع الإلكترون الحر التذبذب فى مجال كهرومغناطيسى (ضوء) ساقط عليه . تمتص الإلكترونات الطاقة الفوتونية لجميع أطوال الامواج الساقطة ولذلك يظهر الفلز معتما وعندما تعود تلك الإلكترونات على السطح إلى مستويات طاقاتها المعتادة تنبعث نفس هذه الأمواج ثانية لتعطى لمعة الفلز .

ظاهرة تولومان Tolman effect :

تحقق تولمان عمليا من أن الإلكترونات فى الفلز تكون حرة الحركة . فأحضر سلكا معدنيا واحدث فيه عجلة تسارع فجائية فوجد هناك تيارا كهربائيا يمر فيه . وتفسير ذلك أن الإلكترونات الحرة قد ألقيت بفعل القصور الذاتى إلى ناحية من السلك وهذا يعنى حركة الشحنات داخلة ، أى مرور تيار كهربائى . وقد حسبت e/ m للجسيمات التى تحدث ظاهرة تولمان نوجد أنها تطابق e / m للإلكترونات .

التوصيل الكهربائى وقانون أوم :

اعتبر تأثير مجال كهربائى x على غاز من الإلكترونات الحرة كثافتها n لوحدة الحجوم.



شكل ١٠ - ٢

تتحرك الإلكترونات حركة عشوائية . وفى حالة عدم وجود المجال تكون محصلة السرعة الإزاحية drift velocity تساوى صفرا ، حيث إن عدد الإلكترونات التى تتحرك فى اتجاه ما تساوى تماما العدد الذى تحرك فى عكس هذا الاتجاه ، شكل (١٠ - ٢)

زمن الإرخاء τ relaxation time يعرف بأنه متوسط الزمن الذى يأخذه الإلكترون ليقطع مسار حر أى λ إذا كانت C هى متوسط السرعة الجزيئية للإلكترون تكون :

$$\tau = \frac{\lambda}{C}$$

وتتوقف قيمة زمن الإرخاء على عوامل التشتيت لإلكترونات التوصيل فى الموصل .

يؤثر وجود المجال الكهربائى على كل إلكترن بقوة F تسبب رزاحته عن موضعه ، ولتكن السرعة الإزاحية v drift velocity وهى فى عكس اتجاه المجال .

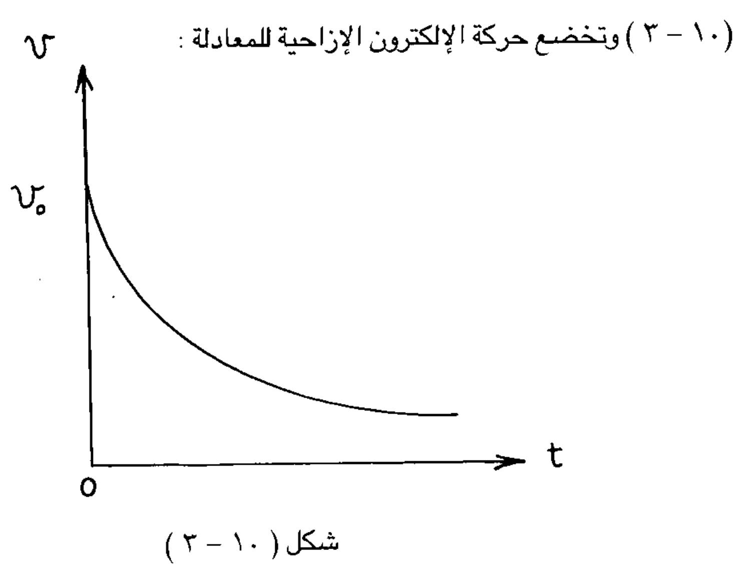
فى حالة الاستقرار ، أى عند استمرار التأثير بالمجال الكهربائى ، نفرض أن السرعة الإزاحية هى V . تكون عجلة تسارع الإلكترونات عندئذ تساوى صفرا أى أن :

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

معادلة الحركة للإلكترون عند بدء التأثير عليه بمجال هى :

$$m\left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau}\right) = F$$

عند إزالة المجال تتناقص السرعة الإزاحية V للإلكترونات حتى تصل للصفر شكل (١٠ - ٣) وتخضع حركة الإلكترون الإزاحية للمعادلة :



شكل (١٠ - ٣)

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$$

وحل هذه المعادلة يعطى سرعة الإلكترون إزاحيا V (t) بعد زمن t من لحظة إزالة المجال الكهربائى :

$$\therefore \; v(t) = v_0 \; \exp - t / \tau$$

وعندما يكون تأثير المجال متصلا فإن معادلة الحركة المنتظمة للإلكترون أثناء انتقاله إزاحيا فى المجال هى :

$$m = \frac{v}{\tau} = F$$

ولكن القوة المؤثرة على الإلكترونات تساوى : $F = X \; e$

$$\therefore \; v = \frac{X e \tau}{m}$$

تعطى هذه المعادلة السرعة الإزاحية المنتظمة للإلكترون فى المجال X .

تعريف : الحركية الإزاحية The Drift mobiility μ D :

تعرف الحركية الإزاحية μ D بأنها السرعة الأزاحية المنتظمة لكل وحدة مجال كهربائى، أى أنها :

$$\mu D = \frac{v}{X} = \frac{e\tau}{m}$$

وتعرف **الكثافة التيارية** J electric current density

بأنها الشحنة الكهربائية التى تمر عموديا فى وحدة المساحات فى وحدة الزمن . أى أن:

$$J = n e v$$

حيث n عدد الإلكترونات لوحدة الحجوم ، e شحنة الإلكترون ، وفى حالة الاستقرار أى عند ثبوت التيار يكون :

$$J = \frac{ne^2\tau}{m} X$$

وتظهر هذه المعادلة تناسبا بسيطا بين شدة التيار J . وشدة المجال الكهربائى x وهو ما ينص عليه قانون أوم المعروف .

من المعادلة السابقة يكون معامل التوصيل الكهربائى σ هو :

$$\sigma = \frac{J}{x} = \frac{ne^2\tau}{m} = \frac{ne^2\lambda}{mc}$$

وبتطبيق نظرية الحركة للغازات التامة على الغاز الإلكترونى الحر فإن طاقة الإلكترون E هى :

$$E = 1/2 \ m \ C^2 = 3/2 \ K \ T$$

حيث C هى السرعة الجزيئية ، للإلكترون . وقد اعتبرنا أن لكل درجة من درجات الحرية للإلكترون طاقة تساوى 1/2 K T ، كما ينص عليها قانون تساوى توزيع الطاقة .

يصبح معامل التوصيل :

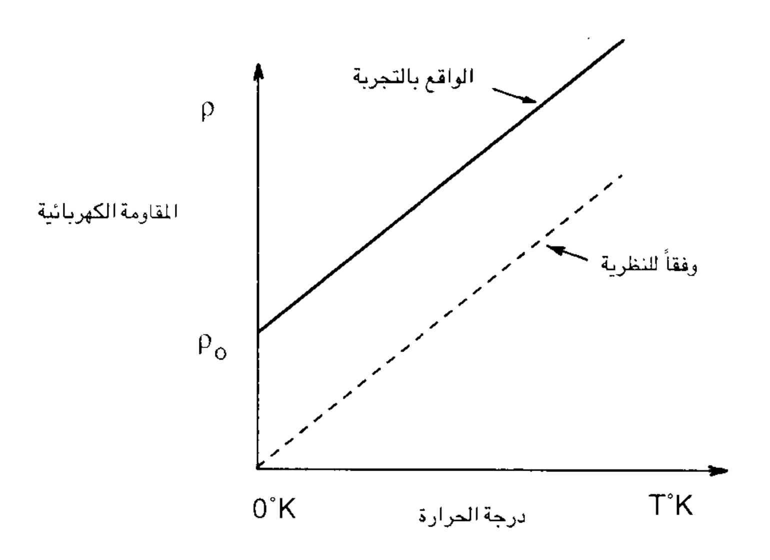
$$\sigma = \frac{\lambda n e^2 C}{3 K T}$$

وتعطى هذه المعادلة تغير التوصيل الكهربائى بدرجة الحرارة T فتزداد المقاومة الإلكترونية بزيادة درجة الحرارة .

وعلى حسب النظرية السابقة فإننا إذا اختبرنا شبيكة مثالية تامة يكون توصيلها الكهربائى عند درجة الصفر المطلق لا نهائيا ($\sigma \propto 1/T$) ومقاومتها تساوى صفرا . ولكن التجربة تثبت أنه عند درجة الصفر المطلق لا تؤول مقاومة أى بلورة إلى الصفر ولكن يكون لها قيمة محددة ρ_0 ، شكل (١٠ - ٤) ويعود وجود هذه المقاومة عند الصفر المطلق إلى وجود شوائب وأخطاء شبيكة فى الترتيب البلورى مما يسبب تشتيت بعض إلكترونات التوصيل ، وهذا يؤدى إلى ظهور هذه المقاومة .

التوصيل الحرارى للغاز الإلكترونى الحر

يعتمد التوصيل الحرارى فى الفلزات على انتقال طاقة الحركة للإلكترونات الحرة . فإذا اعتبرنا قطعة من فلز ذات سطحين متوازيين ، ورفعت درجة حرارة أحد الأوجه بالنسبة للآخر تنتقل الطاقة بواسطة الإلكترونات ، وينتج عن ذلك ظاهرة التوصيل الحرارى .



شكل (١٠ – ٤)

باعتبار أن الغاز الإلكترونى يخضع لقوانين الغازات التامة ، وبتطبيق قانون التوصيل الحرارى للغازات نحصل على :

$$K = 1/2\ n\ c\ \lambda\ k$$

حيث n هو عدد الإلكترونات فى وحدة الحجوم من الغاز الإلكترونى C سرعة الضوء ، λ متوسط طول المسار الحر للإلكترون. انظر الباب الثالث – معامل التوصيل الحرارى لغاز

قانون فيدمان وفرانز Wiedemann - Franz Law :

اكتشف فيدمان وفرانز عمليا أن النسبة بين معامل التوصيل الكهربائى إلى معامل

التوصيل الحرارى ثابته لجميع الفلزات ، ثم جاء بعدهما لورنتز Lorentz فحدد قانون فيدمان وفرانز ليشمل درجة الحرارة أيضا .

إذ وجد أن النسبة $\frac{k}{\sigma}$ تتناسب طرديا مع درجة الحرارة المطلقة .

ويمكن الوصول إلى هذه النتائج العملية نظريا باستخدام نظرية الإلكترون الحر . مما سبق :

$$\sigma = \frac{\lambda n e^2 c}{3 k T}$$

&

$$K = 1/2 \ \lambda \ n \ c \ k$$

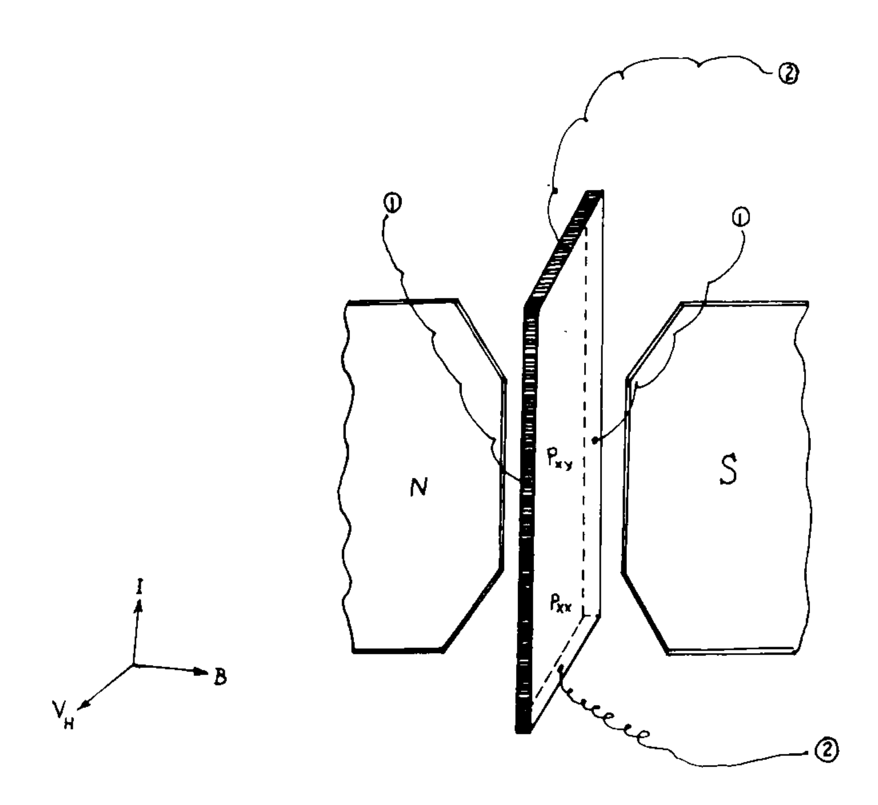
بقسمة المعادلتين نحصل على :

$$\frac{K}{\sigma} = 3/2 \left(\frac{K}{e}\right)^2 T$$

عندما تكون درجة الحرارة T ثابتة تكون النسبة K / σ أيضا ثابتة ، وهذا هو قانون فيدمان وفرانز . كما أن رفع درجة الحرارة يسبب زيادة K / σ زيادة طردية وهذا هو تعديل لورنتز .

ظاهرة هول Th Hall effect :

إذا وضع موصل كهربائى في مجال مغناطيسى H_Z وكان يمر فيه تيار كهربائى Jx بحيث يكون التيار والمجال متعامدين ، يتولد جهد كهربائى عمودى على كل من اتجاه التيار والمجال .



شكل (١٠ – ٥) ظاهرة هول

(1) ... (1) Hall vottage V_H جهد هول $\qquad \rho_{xy} = \frac{V_1}{I}$

(2) ... (2) Pot-differece

on sample V_R فرق الجهد

I شدة التيار المار فى العينة $\qquad \rho_{xx} = \frac{V_2}{I}$

وتفسير ذلك هو أن التيار الكهربائى عبارة عن تيار من الإلكترونات تتحرك بسرعة ازاحية Vx ويسبب وجود المجال العمودى انحراف هذه الإلكترونات فتتراكم على الوجه الاسفل للعينة مما يسبب تولد مجال كهربائى تتزايد شدته حتى يعادل تأثير المجال المغناطيسى الحارف للإلكترونات ويسمى الفرق فى الجهد على سطحى الشريحة المتقابلين بجهد هول Hall voltage .

وللتعبير عن ظاهرة هول رياضيا نفرض أن التيار المار فى شريحة الفلز هو Jx في اتجاه X ، وأن المجال المغناطيسى المؤثر H_Z فى اتجاه z انظر شكل (١٠ - ٥) .

إذا كانت e هى شحنة الإلكترون بالكولوم (وحدات e.m.u) فإن القوة $\vec{F}$ التى تؤثر على الإلكترونات تعطى بالمعادلة :

$$\vec{F} = e\,\vec{E} + e\,\vec{v} \times \vec{H}$$

بما أن حركة الإلكترون فى اتجاه x تكون مركبة القوة فى اتجاه Y

$$F_y = e\left(F_y - \frac{v_x\ H_Z}{c}\right)$$

وتصبح هذه القوة مساوية للصفر ، عندما يتزن تأثير المجال المغناطيسى مع المجال الكهربائى Ey الناتج عن انحراف الإلكترونات .

$$\therefore\ O = e\ E_y - \frac{e\,v_x\ H_z}{c}$$

$$E_y = \frac{1}{c}\ .\ H_z\ v_X$$

الكثافة التيارية Jx تعطى بالمعادلة

$$J_x = n\ e\ v_x$$

$$\therefore\ E_y = \frac{J_x\ .\ H_z}{n\,e\,c}$$

ويعرف معامل هول RH Hall coefficient بأنه المجال الكهربائى المستعرض الذى ينتج عن مرور تيار شدته الوحده عندما تكون شدة المجال المغناطيسى المؤثر هى الوحدة أى أن :

$$\therefore\ R_H = \frac{E_y}{J_x\ .\ H_z} = \frac{1}{n\,e\,c}$$

وإذا كان الفرق فى الجهد V على العينة ذات السمك t فإن معامل هو يصبح :

$$R_H = \frac{V\,/\,t}{J_x\ .\ H_z}$$

ويمكن قياس كل هذه المقادير عمليا .

ويلاحظ أن قيمة RH تكون سالبة أو موجبة على حسب نوع حامل الشحنات فى الموصل ، إلكترونات أو فجوات موجبة elctrons or positive holes

ويعرف **معامل الحركية لهول** μH Hall mobility :

على أنه معامل هول مضروبا فى معامل التوصيل الكهربائى σ

$$\therefore \ \mu H = RH \ . \sigma$$

وقد وجد أن قيمة RH للفلزات المعتادة حوالى $١٠^{-٢٤}$ e.s.u. . وأنها أكبر كثيرا فى حالة اشباه الموصلات حيث أن n لها أصغر كثيرا عنها فى حالة الفلزات .

عندما يكون RH سالبا يكون التوصيل بواسطة الإلكترونات ويسمى n -type conductivity وعندما يكون RH موجبا يكون التوصيل بواسطة الفجوات الموجبة ويسمى عندئذ p - type .

أثر هول الكمى المتكامل Integral Quantum Hall Effect

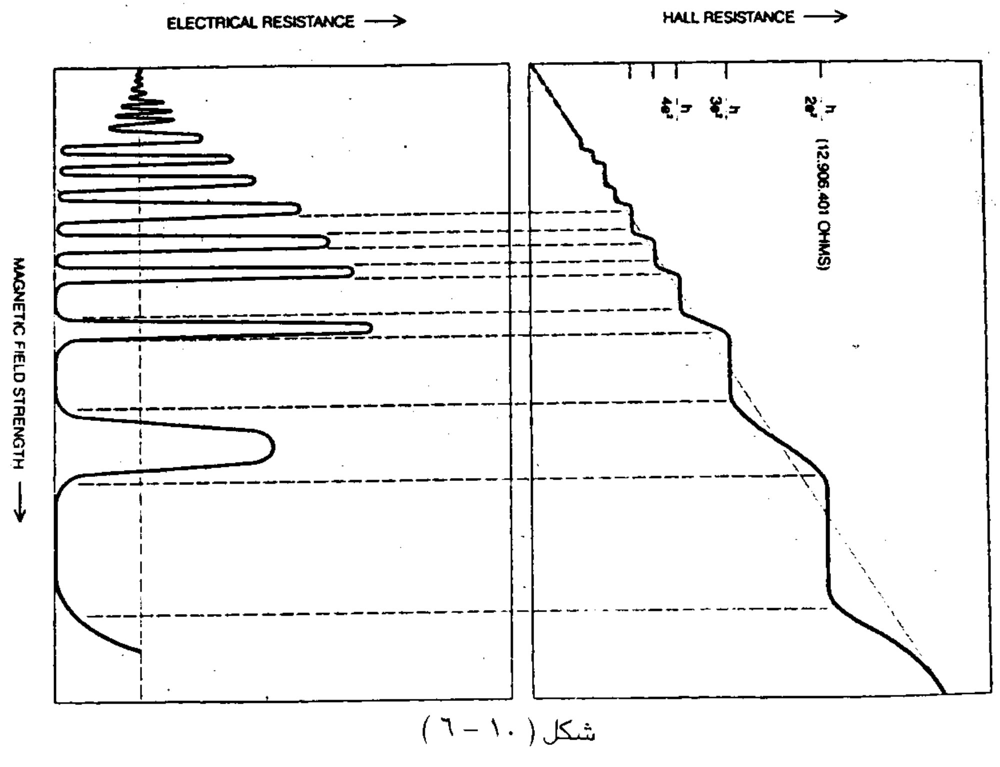
فى عام ١٩٨٥ حصل فون كليتزنج على جائزة نوبل لاكتشافه أثر هول الكمى المتكامل. من المعروف أن النسبة بين فرق الجهد على العينة إلى التيار المار بها تسمى بمقاومة هول ، وذلك فى أثر هول المعتاد حيث تزداد المقاومة طرديا مع شدة المجال المغنطيسى المؤثر .

وجد كليتزنج أن مقاومة هول فى بعض مناطق المنحنى . بينها وبين شدة المجال المغنطيسى ، وجد أن المقاومة لا تتغير وتظل ثابتة بالرغم من تزايد شدة المجال كما مبين بشكل (١٠ – ٦) . وأن مقاومة هول فى تلك المناطق تساوى $(h / n e^2)$ حيث h هو ثابت بلانك ، e شحنة الإلكترون ، n عدد صحيح يأخذ القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .....

كما وجد كليتزنج أن المقاومة الكهربائية تتلاشى تماما عند مناطق ثبوت مقاومة هول .

شكل (١٠ – ٦) أثر هول الكمى . تظل مقاومة هول ثابتة في بعض المناطق لا تتغير مع زيادة المجال المغنطيسى ويقابلها تماما تلاشى المقاومة الكهربية . وعند كل ثبوت لمقاومة

هول تساوى قيمتها ثابت بلانك مقسوما علي عدد صحيح مضروبا فى مربع شحنة الإلكترون ($h / n e^2$)



شكل (١٠ - ٦)

أثر هول الكمى الجزئى Fractional Quantum Hall effect :

بعد اكتشاف أثر هول الكمى المتكامل وجد أنه بزيادة شدة المجال المغنطيسى زيادةيظهر تركيب دقيق فى منحنى المقاومة وشدة المجال . فنبعد أن كانت قيم المقاومة فى مناطق الثبوت تعطى بالمعادلة $\rho_{xy} = h / n e^2$ حيث n هو عدد صحيح يعبر عن مستويات اللف الإلكترونى ، وجد أن n تأخذ قيما كسريه صحيحه rational fractions حيث تتلاشى ايضا قيم المقاومة الكهربية ρ_{xx} . وقد ظهر أثر هول الكمى الجزئى بعد أن امكننا الوصول إلى مجالات مغنطيسية تفوق ١٠٠ كيلو جاوس . ويتشابه أثر هول الكمى الجزئى والمتكامل من جميع النواحى سوى فى أن العدد الكمى n يستبدل بالعدد الكمى $f = \rho / q$ حيث لا قيود على قيمة ρ وأن كانت قيمة q دائما فرديه . وتصبح بذلك مقاومة هول

$$\rho_{xy} = h / f e^2$$

وهذا يعنى أن أثر هول الكمى الجزئى يتميز بمتابعه من الحالات الكمية تعرفها اعداد كمية كسرية $f = \rho / q$ مثل ١/٣ ، ٢/٣ ، ٤/٣ ، ٥/٣ وقد ظهرت مثل هذه الحالات عمليا بزيادة شدة المجال المغنطيسى ولكن عند المجالات الصغيرة نسبيا (أقل من ٥٠ كيلو جاوس) يختفى التركيب الدقيق لأثر هول الكمى ويظهر فقط أثر هول الكمى المتكامل حيث تتلاشى تماما المقاومة الكهربية ρ_{xx} عند ثبوت مقاومة هول ρ_{xx} مع زيادة شدة المجال المغنطيسى .

مسائل وتمارين على الباب العاشر

١ - اذكر ست خواص فيزيائية ، واشرح ارتباطها بنظرية الإلكترون الحر لدرودى دلورنتز .

٢ - أثبت أن العلاقة بين متوسط طول المسار الحر لإلكترون وبين حركيته μ هى :

$$\mu = e\,\lambda / m\,c$$

حيث m كتلة الإلكترون ، c سرعة الضوء .

٣ - إذا كانت حركية الإلكترونات فى السيليكون هى 1500 أوجد معامل توصيله علما بأن الكثافة الإلكترونية فى منطقة التوصيل هى $١٠^{١٥}$ لكل سم^{٣} .

٤ - معامل التوصيل الكهربائى للصوديوم عند درجة ٢٧°م هو 2.17×10^{7} أوم$^{-١}$ متر$^{-١}$. فإذا كانت النسبة بين الكتلة الفعالة إلى الكتلة الحرة للإلكترون فى الصوديوم هى $m^{*} / m_{e} = 1.2$ أوجد :

١ - زمن الإرخاء عند درجة $27\ ^{\circ}C$

٢ - متوسط طول المسار الحر λ عند درجة $27\ ^{\circ}C$

٣ - السرعة الإزاحية v_{x} فى مجال قدره 100 volt / m

٥ - معامل الحركية لهول فى الصوديوم هو $\mu = 0.0053\ m^{2}$ / volt.s ومعامل هول $R_{H} = -\ 2.5 \times 10^{-10}$ فولط متر^{٣} / امبير وبر عند درجة حرارة الغرفة . أوجد معامل التوصيل الكهربى للصوديوم .

٦ – أوجد زمن الإرخاء لاستطارة الإلكترونات فى الجرمانيوم عند درجة حرارة الغرفة إذا علم أن الكتلة الفعالة للإلكترون $m^* = 0.2\ m_e$ والحركية للإلكترونات $\mu_e = 0.36\ m^2 / V . sec$.

وإذا كانت السرعة الحرارية عند درجة الغرفة هى $10^5\ m / s$ ما هى متوسط المسافة الذى يقطعها الإلكترون بين تصادمين . قارن هذه المسافة بالبعد الشبيكى .

٧ – طعمت عينة من السيليكون بعدد 10^{17} ذرة فوسفور لكل سم٣ . ماذا تكون مقاومته النوعية ؟ أوجد فلطيه هول لعينه منه سمكها $100\ \mu m$ ويمر بها تيار $I_x = 1\ m\ A$ موضوعه فى مجال مغنطيسى $1\ K\ G = 10^{-5}\ w\ b / cm^2$.

٨ – الكترون توصيل فى السيليكون موصليته $\mu = 1350\ cm^2 / V\text{-}sec$ له طاقة حرارية $E = \frac{1}{2} m_0 v_{th}^2 = R\ T$ حيث v_{th} هى السرعة الحرارية للإلكترون . وضع هذا الإلكترون فى مجال كهربائى شدته $100\ v/cm$ أثبت أن السرعة الإزاحية للإلكترون صغيرة بالنسبة للسرعة الحرارية . ثم كرر فى حالة مجال كهربائى $10^4\ V / cm$ باستخدام نفس الحركية μ . علق على النتيجة فى الحالتين .

٩ – وضعت عينة الجرمانيوم فى مجال مغناطيسى $5\ K\ G$ وامرر تيار $2\ m\ A$ وكانت أبعاد العينة هى : $L = 2.5\ m\ m\ ;\ W = 0.25\ m\ m\ \ t = 50\ \mu\ m$. وجد أن فرق الجهد على طول العينة $85\ m\ V$ وفرق الجهد على عرض العينة $- 1.25\ m\ v$.

١ – أوجد النسبة بين مقاومه هول إلي المقاومة الكهربية للعينة .

٢ – أوجد نوع وتركيز حاملات الشحنة وكذلك حركيتها

$(1\ K\ gauss = 10^{-5}\ \ wb / cm^2)$

١٠ - أوجد معامل التوصيل للسيليكون الذى يحتوى على 10^{15} / cm^3 من الثقوب عند درجة حرارة الغرفة . حركية السيليكون تساوى $1500\ cm^2 / V.s$.

الباب الحادى عشر

النظرية الكمية للإلكترون الحر :
Sommerfeld Quantum free electron theory

تعود فشل النظرية الكلاسيكية للغاز الإلكترونى الحر فى تفسير القيم المقاسة للسعة الحرارية heat capacity والقابلية المغناطيسية magnetic suceptibility للفلزات إلى الفرض الأساسى فى النظرية بأن الإلكترونات تشبه الغاز التام ، وتتبع إحصائيا إحصاء ماكسويل وبولتزمان ، حيث يمكن لأى عدد من الإلكترونات أن يكون على نفس مستوى الطاقة .

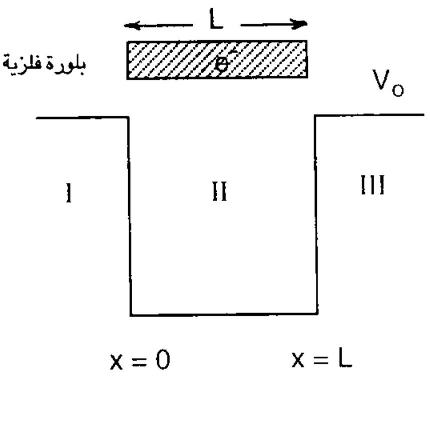
وهذا ما لا يسمح به مبدأ باولى Exclusion principle ، الذى ينص على أن كل مستوى من مستويات الطاقة يشغله إلكترونان فقط $S = \pm 1/2$.

لذلك أدخل سومر فيلد المبدأ الكمى على نظرية الإلكترون الحر الكلاسيكية ، وقد تمكن بذلك تفسير المزيد من الحقائق العلمية المعروفة عمليا ، وإن لم تستطع هذه النظرية تفسير تلك الفروق الكبيرة فى معاملات توصيل المواد المختلفة .

الغاز الإلكترونى الكمى The quantum electron gas :

اعتبر بلورة فلزية شكل (١١ - ١) . تكون طاقة الجهد للإلكترون فى كل مكان بداخلها واحدة وتساوى صفر . يمنع سطح البلورة خروج أي إلكترون حر من داخلها ، وذلك لوجود حاجز جهد مرتفع وليكن ارتفاعه V_0 .

معادلة شرودنجر للإلكترون بداخل البلورة أى الساقط فى بئر الجهد ذو الارتفاع V_0 هى :



شكل (١١ - ١)

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m E}{h^2}\Psi = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة يعطى الدالة الموجيه Ψ للإلكترون داخل الفلز ، أى داخل بئر الجهد فى المنطقة II على الصورة :

$$\Psi = A \sin \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\ x + B \cos \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\ . x$$

أما فى خارج البلورة ، وإذا لم يكن ارتفاع بئر الجهد V_0 كبيرا فيجوز حدوث ظاهرة الإنفاق Tunnel effect كما فى ميكروسكوب المجال الأيونى وتكون الدالة الموجية على الصورة :

$$\Psi_{III} = C\ e^{-\frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(V_0 - E)}\ .X}$$

$$\Psi I = D e^{\frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(V_0 - E)}\ .X}$$

حيث L هو بعد البلورة crystal dimension . وبتطبيق شروط الحدود boundary condition :

$$\Psi = 0 \text{ at } \quad x = 0 \quad \& \quad x = L$$

نحصل على :

$$\Psi_L = A \sin \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} \,.\, L$$
$$= 0$$

وتتحقق هذه المعادلة عندما يكون :

$$\frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} \,.\, L = n\pi$$

$n = 1,2,3,.....$

وبذلك يكون للإلكترون الحر داخل البلورة مستويات للطاقة تحددها :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} \,.\, n^2$$

عندما تكون L كبيرة فإن مستويات الطاقة تكون قريبة جدا من بعضها . فمثلا إذا كان $L = 1\ cm$ فإن الفرق بين مستويين متتاليين للطاقة الإلكترونية يكون $3.5 \times 10^{-19}\ eV$

إذا اعتبرنا بلورة مكعبة طول ضلعها L cm تكون الدالة الموجيه بداخلها هى :

$$\Psi = A \sin \frac{nx\pi}{L} \,.\, x \sin \frac{ny\pi}{L} \,.\, y \sin \frac{nz\pi}{L} \,.\, z$$

وتكون مستويات الطاقة الإلكترونية هى :

$$E(n_x\ n_y\ n_z) = \frac{h^2}{8mL^2} \left(n_z^2 + n_y^2 + n_x^2\right)$$

مما سبق يتضح أن طاقة الإلكترون الحرة داخل أى فلز لا تأخذ أى قيمة ، كما تنص عليها النظرية الكلاسيكية .

وبتطبيق مبدأ باولى وعدم إمكان وجود أى إلكترونين لهما نفس الأعداد الكمية الأربعة ، لذلك فإن كل مستوى للطاقة لا يشغله سوى إلكترونين مغزليهما متعاكسين opposite spin .

ولهذا السبب أصبح إحصاء ماكسويل وبولتزمان غير صالح للتطبيق على حالة إلكترونات الفلز ، ويجب تطبيق الاحصاء الكمى بدلا منه .

الإحصاء الكمى Quantum statistics :

إحصاء بوز واينشتين وفيرمى ديراك Fermi Driac and Bose - Einstein statistics

نستخدم هنا أيضا فراغ الطور ذا الأبعاد x, y, z, p_x, p_y, p_z

وقد استبدلنا بالسرعات ومركباتها كمية الحركة $p = m v$ يكون حجم الخلية الصغيرة elment of volume فى هذا الفراغ هو :

$$H = dx\ dy\ dz\ dp_x\ zdp_y\ dp_z$$

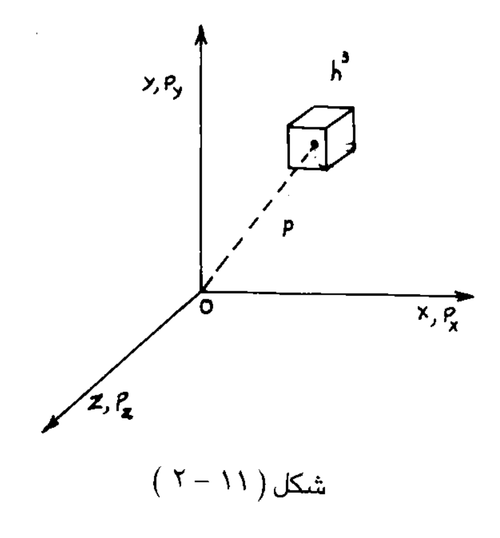
انظر شكل (١١ - ٢)

باستخدام الميكانيكا الكلاسيكية فإن مكان وكمية حركة أى جسيم يمكن تحديدهما بأى درجة من الدقة ، وذلك يمثله نقطة هندسية فى فراغ الطور .

أما إذا أدخلنا الميكانيكا الكمية quantum mechanics ، فإنه يوجد حد limit للدقة فى تحديد المكان وكمية الحركة معا ، وهو ما يمليه مبدأ عدم التحديد لهيزنبرج .

أصغر حجم فى فراغ الطور يمكن لنا أن نجزم بأن الجسيم موجود بداخله هو h^3 حيث h هو ثابت بلانك .

ويستنتج ذلك مباشرة باستخدام مبدأ هيزنبرج :



شكل (١١ - ٢)

$$\Delta x \Delta p_x = h$$
$$\Delta y \Delta p_y = h$$
$$\Delta z \Delta p_z = h$$

نطلق لفظ غرفة أو حجرة compartment على الحجم h^3 ، للتمييز بينه وبين الخلية Cell ذات الحجم H وهو حجم اختيارى ، ويشترط فيه فقط أن تكون أبعاده $dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z$ صغيرة بالنسبة لأبعاد المجموعة xyz وكمية حركة الجسيمات $p_x\, p_y\, p_z$

∴ عدد الغرف فى الخلية = $n = \frac{H}{h^3}$

عدد النقط فى فراغ الطور داخل الخلية i = Ni

تحدد مثل الأعداد Ni فى الخلايا المختلفة الحالة الماكروئية للمجموعة ، وبالتالى خواصها المحسوسة .

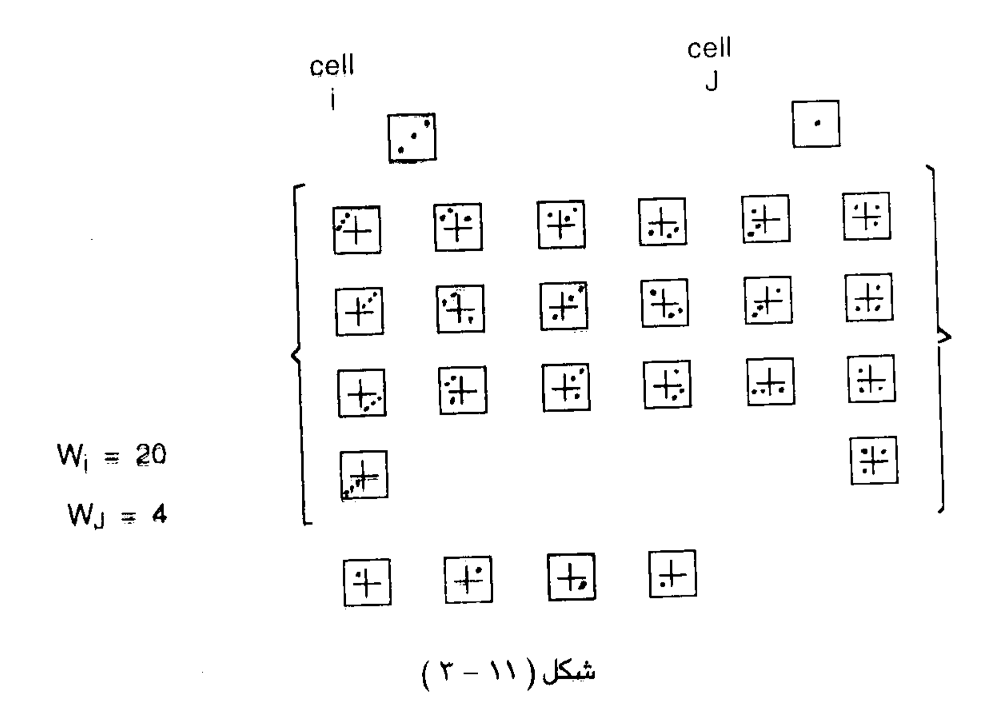
فى إحصاء ماكسويل وبولتزمان تتغير الحالة الميكرونية بتبادل عدد من النقط بنفس العدد بين خليتين ، ولكن ذلك لا يؤثر على الحالة الماكروئية ، شكل (١١ - ٣) وتغيير الحالة الميكرونية **يفرض أن يكون لكل نقطة شخصيتها الذاتية .**

« وهذا هو ما نلغى وجوده فى الإحصاء الكمى » .

إذ لا يوجد معنى من وراء التمييز بين جزىء وآخر فى غاز وفرض شخصية ذاتية لكل.

لذلك فإننا نعرف الجزيئات بنقط فى فراغ الطور وليس بحروف a b c كما سبق فى احصاء ماكسويل وبولتزمان ، **وهذا هو التعديل الأول فى الإحصاء الكمى** وتطبيقه يعطى إحصاء بوز واينشتين Bose - Einstein statistics ، **أما التعديل الثانى** فيأتى بسبب وجود قيد يضعه مبدأ باولى على عدد النقط التى يمكن أن تشغل كل حجره كما هو الحال بالنسبة للإلكترونات (اثنين $S = \pm 1/2$ فى كل غرفة) وتطبيق هذا الشرط أيضا يعطى إحصاء فيرمى وديراك :

Fermi - Dirac statisitcs



شكل (١١ - ٣)

إحصاء بوز - إينشتين :

ينطبق على الجسيمات التى لا تخضع لمبدأ باولى مثل الفوتونات والجسيمات التى لها دالة موجيه متماثلة Symmetric wave function ، ولذلك يمكن لأى عدد من النقط أن تشغل أى حجرة فى الخلية .

اعتبر المثال التالى :

نفرض أن لدينا أربعة غرف فى كل خلية Cell وأن هناك خليتين فقط وأربعة نقط (كالمثال الذى أوردناه عند الكلام عن إحصاء ماكسويل وبولتزمان) .

بإهمال الشخصية الذاتية لكل نقطة (فى إحصاء ماكسويل عرفنا النقطة بالحروف a b c .. لإعطائها شخصيات ذاتية) نجد أن هناك عدد ٢٠ طريقة مختلفة لترتيب ٣ نقط

فى الخلية i وعدد ٤ أربعة طرق لترتيب نقطة واحدة فى الخلية j ، وهذا يعنى وجود احتمال ديناميكى حرارى لكل خلية يساوى عدد الطرق التى يمكن بها ترتيب النقط فى الخلية .

إذا كان W_i & W_j هما الاحتمالين فى الخليتين i & j فى هذا المثال و

$W_i = 20 \; ; \; W_j = 4$

ويكون بذلك الإحتمال الديناميكى الحرارى للحالة الماكروئية التى يمثلها ٣ نقط فى الخلية j ونقطة واحدة فى الخلية i هى :

$W = W_i \, . W_j = 20 \times 4 = 80$

وواضح أن هذه القيمة تختلف تماما عن $W = 4$ التى حصلنا عليها للحالة الماكروئية ٣ : ١ فى إحصاء ماكسويل وبولتزمان .

وفى الحالة العامة عندما يكون هناك أى عدد من الخلايا يكون الاحتمال الديناميكى الحرارى هو :

$$W = \Pi \; W_i$$

حيث المضروب Π يشمل جميع الخلايا فى فراغ الطور .

العلاقة بين W_i , N_i :

نفرض أننا نرقم الحجرات فى الخلية بالأرقام ١ ، ٢ ، ٤ ، . . . إلى n ونقط الطور phase point بالحروف a,b,c,... إلى N_i إذا أخذنا مثلا الخلية i يمكن أن تكون النقط فى حجراتها كما يأتى :

1 a b	2 c	3	4 d e f

شكل (١١ – ٤)

الخ . . . .

العدد المكتوب أولا يبين رقم الحجرة .

أولا : بما أن هناك عدد n حجرات ، لذلك فيوجد n طريقة لترتيب أرقام الحجرات

دون تغيير فى ترتيب الحروف cba .

ثانيا : عدد التباديل التى يمكن بها ترتيب n عدد و N_i نقطة ، بحيث يبدأ الترتيب دائما برقم الحجرة هو : $(n + N_i - 1)!$

« وضع « – ١ » هنا لوجوب بدء الترتيب برقم دائما »

∴ عدد الطرق المختلفة التى يمكن ترتيب بها الاعداد والنقط هى

$n(n + N_i - 1)!$

ثالثا : يتكرر حدوث بعض هذه الترتيبات بين عدد n حجرات فمثلا كما فى شكل (١١–٥):

(أ)	4 d e f	3	2 c	1 a b
(ب)	1 a b	2 c	4 d e f	3

شكل (١١ – ٥)

الترتيب (أ) هو بعينه الترتيب (ب) ويعطى نفس الحالة الميكرونية .

لذلك نتفادى التكرار لنفس الحالة بالقسمة على $n!$

رابعا : بما أن الحروف c ; b ; a كلها متماثلة ولا فرق بينها ، لذلك فإن N_i حرفا يمكن أن تترتب فى الخلية بعدد من الطرق يساوى $N_i!$ ، وتعطى جميعا نفس الحالة الميكرونية .

لذلك نتفادى التكرار لنفس الحالة بالقسمة على $N_i!$.

∴ عدد الحالات الميكرونية الغير متكررة =

$$\frac{n(n + N_i - 1)!}{n!\,N_i!}$$

أى أن الاحتمال الديناميكى الحرارى فى الخلية i هو :

$$W_i = \frac{(n + N_i - 1)\,!}{(n-1)\,!\;N_i\,!}$$

« وضعنا هنا $n\,! = n\,(n-1)\,!$ »

وبتطبيق ذلك فى المثال المعطى حيث :

$n = 4$

$N_i = 3\ ,\ N_j = 1$

نجد أن :

$$W_i = \frac{(4+3-1)\,!}{(4-1)\,!\,3\,!} = \frac{6\,!}{3\,!\,3\,!} = 20$$

$$W_j = \frac{(4+1-1)\,!}{(4-1)\,!\,1!} = \frac{4!}{3\,!\,1!} = 4$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها بالعد البسيط .

أخيرا وبما أن كل حالة ميكرونية للخلية i يمكن أن يقابلها أى حالة ميكرونية للخلية j . لذلك يكون عدد الحالات الميكرونية لجميع الخلايا وهو الاحتمال الديناميكى الحرارى للمجموعة هو :

$$W = \Pi\ W_i = \Pi\ \frac{(n + N_i - 1)\,!}{(n-1)\,!\,N_i\,!}$$

دالة التوزيع لبوز وإينشتين :

حالة الاستقرار أو الاتزان نحصل عليها عندما يكون الإنتروبيا S أكبر ما يمكن .

ولكن $S = k \ln W$ يكون إذاً شرط الاتزان هو :

$$\delta \ln W = 0$$

$$\therefore\ \ln W = \Sigma\,(\ln (n + N_i - 1)\,! - \ln (n-1)\,! - \ln N_i\,!)$$

وباستخدام تقريب سترلنج ($\ln N\,! = N \ln N - N$) وبإهمال العدد ١ فى المعادلة بالمقارنة بالأعداد الكبير N_i & n نحصل على :

$$\ln W = \Sigma \left(N_i + n\right) \ln \left(N_i + n\right) - n\ln n - N_i \ln N_i !)$$

وبمفاضلة المعادلة :

$$\therefore \delta \ln W = \Sigma \left[\ln \frac{n + N_i}{N_i} \right] \delta N_i = 0$$

وباعتبار أن الطاقة الكلية للمجموعة ثابتة ، وكذلك عدد الجسيمات يكون :

$$\delta N = \Sigma \delta N_i = 0$$

$$\delta U = \Sigma W_i \delta N_i = 0$$

وبضرب المعادلة الأولى فى $- \ln B$

والمعادلة الثانية فى $-\beta$

وبالجمع مع معادلة $\delta \ln W = 0$ نحصل على :

$$\Sigma \left[\ln \frac{n + N_i}{N_i} - \ln B - \beta \omega_i \right] \delta N_i = 0$$

يلاحظ أن قيم : δN_i لا تتوقف على أى شىء وكل حد فى المجموع يتلاشى على حدة .

$$\therefore \ln \frac{n + N_i}{N_i} = \ln B + \omega_i$$

$$\therefore N_i = \frac{n}{B \exp \beta \omega_i - 1} = n . f$$

وتوضع عادة قيمة الثابت $B = 1$ ، حيث إن الاتفاق النظرى مع التجربة يستلزم ذلك، وتكون بذلك دالة التوزيع لبوز وإينشتين هى :

$$f = \frac{1}{\left[e^{\omega_i / kT} - 1 \right]}$$

علما بأن :

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

تطبيق : بتطبيق إحصاء بوز وإينشتين على غاز من الفوتونات يشكل إشعاعا حراريا درجة حرارته المطلقة T ، أثبت أن كثافة الطاقة لهذا الغاز فى المدى بين $\upsilon + d\upsilon$ هى :

$$E(\upsilon) = \frac{8\pi h}{c^3} \quad \frac{\upsilon^3 \, d\upsilon}{\left(e^{h\upsilon/kT} - 1\right)}$$

حيث c , k , h تأخذ معانيها المألوفة .

فإذا اعتبرنا حالة غاز من الفوتونات طاقة كل فوتون $h\upsilon$ تصبح دالة التوزيع :

$$f(\upsilon) = \frac{1}{\left(e^{h\upsilon/kT} - 1\right)}$$

كمية الحركة للفوتون

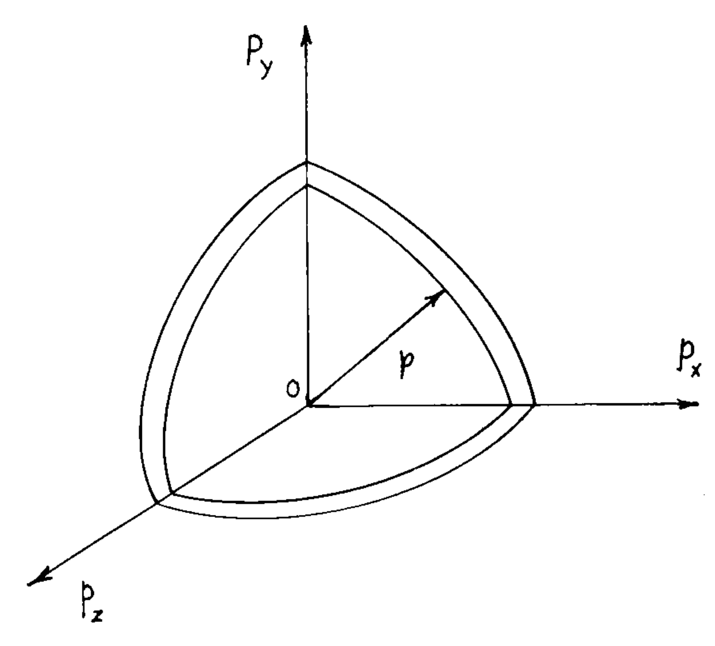
$$m\ c = p = \frac{h\upsilon}{e} = \frac{\omega}{c}$$

باستبدال n فى معادلة N_i بالمقدار $\frac{2}{h^3}\ dx\ dy\ dz\ dp_x\ dp_y\ dp_z$ وأيضا N_i بـ d^6N (المعامل التفاضلى السادس لـ N) وبإجراء التكامل فى الفراغ على x, y, z نحصل على توزيع كمية الحركة فى الفراغ . (المعامل 2 فى قيمة n باعتبار وجود نوعين من الفوتونات يمينى right handed ، ويسارى left نسبة إلى أن الضوء يمكن أن يكون ، استقطابه الدائرى يمينا أو يساريا : right or left circularly polarized light)

$$\therefore\ d^3N = \frac{2V}{h^3} \cdot \frac{1}{\left(e^{pc/kT} - 1\right)}\ dp_x\ dp_y\ dp_z$$

وباعتبار قشرة كريه رقيقة فى فراغ الطور نصف قطرها p وسمكها dp شكل (١١ - ٦) يكون :

$$dN_p = \frac{2V}{h^3} \cdot \frac{4\pi p^2}{\left(e^{pc/kT} - 1\right)}\ dp$$



شكل (١١ – ٦)

ويمكن تحويل المعادلة السابقة لتعطى توزيع الفوتونات بدلالة الترددات ، وذلك باستخدام العلاقات :

$$p = \frac{h\upsilon}{c} \quad ; \quad dp = \frac{h}{c}\, d\upsilon$$

$$\therefore \quad dN_{\upsilon} = \frac{8\pi V}{c^3} \cdot \frac{\upsilon^3}{\left(e^{h\upsilon/kT} - 1\right)}\, d\upsilon$$

وبما أن عدد الفوتونات لوحدة الحجوم هو $\frac{dN_p}{V}$ وطاقة الفوتون $h\upsilon$ تكون كثافة الطاقة enegy density (الطاقة لوحدة الحجوم) فى المدى بين (υ & $\upsilon + d\upsilon$) هو :

$$E(\upsilon)\, d\upsilon = \frac{h\upsilon}{V}\, dN_{\upsilon} = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\upsilon^3}{\left(e^{h\upsilon/kT} - 1\right)}\, d\upsilon$$

وتتفق هذه المعادلة مع معادلة بلانك لكثافة الطاقة الإشعاعية فى حيز درجة حرارته المطلقة T .

إحصاء فيرمى وديراك Fermi - Dirac Statistics :

لإيجاد نـوع من الإحصاء يصلح للجسيمات التى لها دوال موجية غير متماثلة anti symmetric wave functions مثل الإلكترونات والبروتونات .. إلخ . ، يجب تطبيق مبدأ باولى لكى لا يشغل أى مستوى للطاقة أكثر من جسيمين ، وهذا يعنى أن الحجرة compartment فى فراغ الطور (ذات الحجم h^3) لا يمكن أن يوجد بها سوى جسيمين . ($S = \pm 1/2$) .

وهذا يعنى أن إحداثيات هذه الحجرات فى فراغ الطور تناظر تماما الأعداد الكمية للجسيم .

∴ عدد الجسيمات التى يمكن أن تشغل كل خلية هو :

$$n = 2\,\frac{H}{h^3} = \frac{\text{حجم الخلية}}{\text{حجم الحجرة}} \times ٢$$

نفرض أن الجسيم الواحد يشغل غرفة واحدة أى نصف حجرة ، بفرض أن الحجرة (مستوى الطاقة الواحد) مقسم إلى غرفتين ، شكل (١١ – ٧) .

وبالعودة للمثال الخاص بتوزيع الأربع نقط فى الخليتين .

وباعتبار الحالة الماكروئية :

$N_j = 1$ & $N_i = 3$

شكل (١١ – ٧)

شكل (١١ – ٨)

أى أنه يوجد أربعة طرق فقط لترتيب ثلاث نقط فى الخلية i شكل (١١ - ٨) وكذلك أربعة طرق لترتيب نقطة واحدة فى j أى أن عدد الطرق الكلية أو الاحتمال الديناميكى الحرارى لهذه الحالة الماكروئية $(N_i = 3 \ , \ N_j = 1)$ هو :

$$W = W_i \ W_j = 16$$

وهذا يختلف عن العدد 4 لنفس الحالة الماكروئية بإستخدام إحصاء ماكسويل ، وكذلك العدد $W_i = 80$ باستخدام إحصاء بوز وإينشتين .

∴ الاحتمال الديناميكى الحرارى لأى عدد من الخلايا هو :

$$W = \Pi \ W_i$$

العلاقة بين N_i & W_i :

نفرض أن هناك n غرفة فى خلية فيها عدد N_i مشغول والباقى $(n - N_i)$ خال (يلاحظ هنا أن الغرفة الواحدة يشغلها نقطة واحدة)

∴ عدد التباديل الغير متماثلة داخل الخلية i وهى الاحتمال الديناميكى الحرارى لها:

$$W_i = \frac{n!}{N_i!\,(n - N_i)!}$$

حيث تباديل الفراغات (الغرف) ! n وتباديل المشغول فقط منها ! N_i وتباديل الفارغ منها ! $(n - N_i)$ وتطبيق ذلك على المثال المعطى :

$N_j = 1$ & $N_i = 3$ & $n = 4$ نحصل على :

$$W_j = \frac{4!}{1!\,3!} = 4 \ \& \ W_i = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

وهى النتيجة التى حصلنا عليها بالعد البسيط .

∴ الاحتمال الديناميكى الحرارى لحالة ماكروئية باستخدام إحصاء فيرمى وديراك هو:

$$W = \Pi \ \frac{n!}{N_i!\,(n - N_i)!}$$

وباستخدام المعادلة $S = k \ln W$ ، ثم باعتبار أن حالة الاستقرار تكون عندما تصبح S قمة نوجد شرط الاستقرار Maximum entropy من المعادلة :

$$\delta \ln W = 0$$

$$\therefore \ln W = \Sigma \left[(\ln n! - \ln N_i! - \ln (n - N_i)!\right]$$

وباستخدام تقريب سترلنج نحصل على :

$$\ln W = \Sigma \left(n \ln n - N_i \ln N_i - n \ln (n - N_i) + N_i \ln (n - N_i) \right)$$

وبالمفاضلة بالنسبة إلى N_i والمساواة بالصفر نحصل على :

$$\delta \ln W = \Sigma \ln \frac{n - N_i}{N_i} \delta N_i = 0$$

ولما كان العدد الكلى لنقط المجموعة ثابتاً وكذلك الطاقة الكلية لذلك :

$$\delta N = \Sigma \delta N_i = 0$$

$$\delta U = \Sigma \omega_i \delta N_i = 0$$

ويضرب المعادلة الأولى فى $-\ln B$ والثانية فى $-\beta$ ، وبالجمع مع معادلة $\delta \ln W = 0$ نحصل على :

$$\Sigma \left(\ln \frac{n - N_i}{N_i} - \ln B - \beta \omega_i \right) \delta N_i = 0$$

ولكن طالما أن δN_i فى الخلايا المختلفة لا يتوقف على بعضه البعض :

$$\therefore \ln \frac{n - N_i}{N_i} - \ln B + \beta\omega_i = 0$$

$$\therefore N_i = \frac{n}{\left(B e^{\beta \omega_i} + 1 \right)}$$

وباستخدام الديناميكا الحرارية كما سبق فى حالة إحصاء ماكسويل وبولتزمان نجد أن :

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

أما عن قيمة الثابت B فقد أوجد سومر فيلد Sommerfeld قيمته (الطريقة طويلة ومعقدة ولا مجال لذكرها هنا) كما يأتى :

$$B = e^{-\omega_F / KT}$$

حيث ω_F هى طاقة فيرمى ، وسيرمز لها بالرمز E_F فيما بعد .

وهذا يعطى دالة التوزيع لفيرمى وديراك على الصورة :

$$\frac{N_i}{n} = f = \frac{1}{\left(e^{(w_i - w_F)/kT} + 1\right)}$$

ولإيجاد دالة التوزيع فى فراغ الطور بدلالة كمية الحركة p نضع كما سبق :

$$n = \frac{2H}{h^3} = \frac{2}{h^3}\ dx\ dy\ dz\ \ dp_x\ dp_y\ dp_z$$

ونستبدل بدلا من N_i القيمة $N_i = d^6 N$ ، وكذلك بدلا من W_i القيمة W فنحصل على

$$d^6N = \frac{2}{h^3}\ \frac{1}{\left[\ e^{(w - w_F)kT} + 1\right]}\ dp_x\ dp_y\ dp_z\ dx\ dy\ dz$$

وباجراء التكامل على x.y.z

$$\therefore\ d^3N = \frac{2V}{h^3}\ \frac{1}{\left(e^{(w - w_F)kT} + 1\right)}\ dp_x\ dp_y\ dp_z$$

وباعتبار وحدة الحجوم من المجموعة نقسم على الحجم V

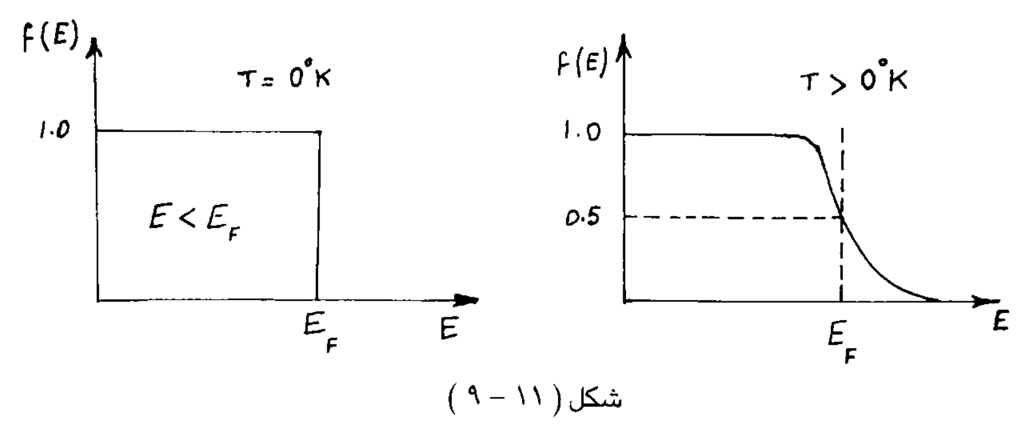
$$\therefore\ d^3N = \frac{2}{h^3}\ .\ f\ .\ dp_x\ dp_y\ dp_z$$

حيث : $f = \dfrac{1}{e^{(w - w_F)kT} + 1}$ وتسمى دالة التوزيع لفيرمى - وديراك

طاقة فيرمى E_F . Fermi Energy :

نطبق إحصاد فيرمى وديراك على الغاز الإلكترونى الكمى ، نفرض أن E هى طاقة احد المستويات الممكنة an allowed state ، وأن طاقة فيرمى هىE_F . احتمال أن يكون هذا المستوى من الطاقة E مشغولا بإلكترونين هو :

$$f(E) = \frac{1}{\left(e^{(E-E_F)/kT} + 1\right)}\ .$$



شكل (١١ – ٩)

ولتوضيح معنى طاقة فيرمى E_F نرسم بيانيا الدالة $f(E)$ بدلالة الطاقة E .

عند درجة الصفر المطلق تكون جميع مستويات الطاقة الأقل من مستوى طاقة فيرمى جميعها مشغول بإلكترونين لكل مستوى . وتكون قيمة دالة التوزيع 0.5 للإلكترون وواحد صحيح لمستوى الطاقة ($f(E) = 1$) .

جميع المستويات الأعلي من E_F تكون شاغرة إذا كانت درجة الحرارة هى صفر مطلق، شكل (١١ – ٩) .

إذا رفعنا درجة الحرارة من الصفر المطلق تستطيع الإلكترونات التي تشغل مستويات الطاقة القريبة من طاقة فيرمى أن تكتسب طاقة بفعل الحرارة ، فترتفع إلى المستويات الأعلى الشاغرة .

ارتفاع درجة الحرارة لا يؤثر على جميع إلكترونات الغاز ، ولكنها فقط تؤثر على الإلكترونات عند سطح فيرمى ، والتى يمكن لها أن تجد مكانا شاغرا فى مستويات الطاقة الأعلى منها ، كما يحدث فى حالة البخر من السوائل حيث لا يغادر السطح سوى الجزيئات العلوية عند السطح الحر .

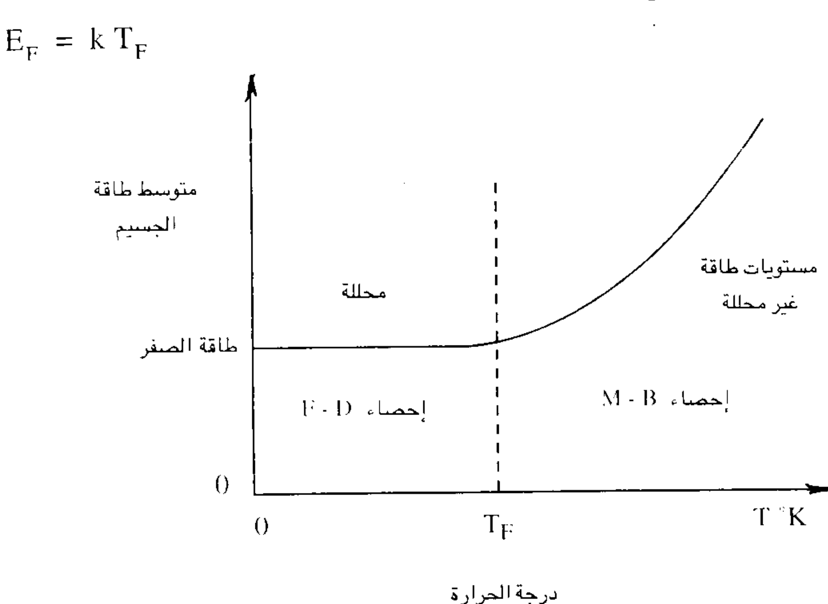
لهذا السبب فإن احصاء فيرمى ديراك يتميز بعدم التأثر الكبير بدرجة الحرارة ،

وأيضا عند الصفر المطلق يوجد بالمجموعة كمية من الطاقة تسمى طاقة نقطة الصفر Zero point energy وهذا اختلاف جوهرى عن إحصاء ماكسويل الذى تتلاشى فيه تماما طاقة المجموعة عند درجة الصفر المطلق .

درجة حرارة فيرمى : Fermi temperature

عند رفع درجة الحرارة بدرجة كبيرة نجد أن توزيع فيرمى يتحول إلى توزيع ماكسويل شكل (١١ – ١٠) . وتعرف درجة الحرارة التى يحدث عندها هذا التحول بدرجة حرارة فيرمى T_F °K وتعطى بالمعادلة :

$$E_F = k\,T_F$$



شكل (١١ – ١٠)

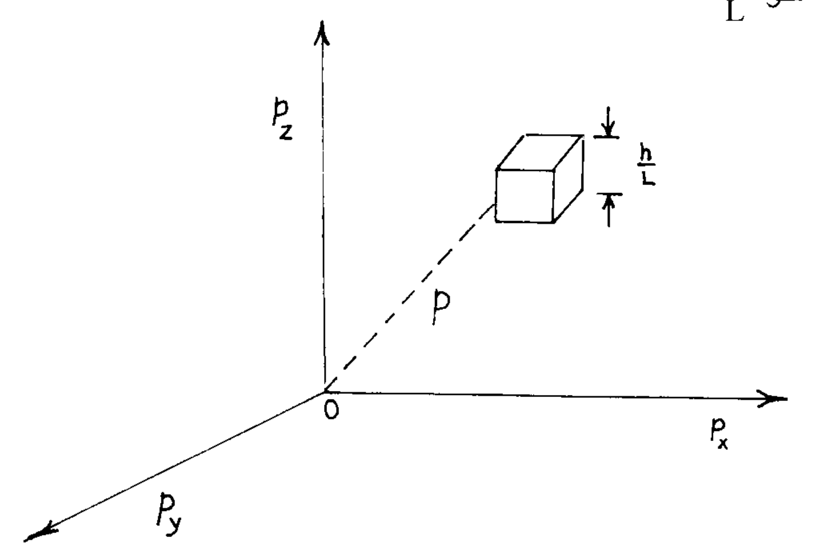
وتصل قيمة T_F للفلزات حيث تركيز الإلكترونات كبيرا إلى حوالى ٢٠٠٠٠ درجة مطلقة . بينما فى حالة أشباه الموصلات فقد تكون T_F أقل من درجة حرارة الغرفة . وهذا يعنى أنه فى حالة أشباه الموصلات يمكن اعتبارها غير محللة non degenerate عند درجة حرارة الغرفة ، حيث يجوز عندئذ تطبيق إحصاء ماكسويل .

تطبيق إحصاء فيرمى وديراك على الغاز الإلكترونى فى الموصلات

حساب طاقة فيرمى : E_F للغاز الإلكترونى فى الفلزات

يتحدد فى فراغ الطور ذى الأبعاد p_z p_y p_x x y z حالة أى الإلكترون فى الغاز . لنعتبر فقط فراغ كمية الحركة p_z p_y p_x . نفرض أن الإلكترون موجود في بلورة مكعبة طول ضلعها L .

عدم التحديد في كمية الحركة Δp_x فى الاتجاه السينى يساوى حسب قاعدة هيزنبرج $\frac{h}{L}$ ، وبالمثل يكون عدم التحديد فى كمية حركة الإلكترون فى كل من الاتجاهين y,z هو $\frac{h}{L}$.



شكل (١١ - ١١)

فإذا قسمنا فراغ كمية الحركة إلى خلايا شكل (١١ - ١١) طول الضلع فيها $\frac{h}{L}$ يكون حجمها $\frac{h^3}{L^3}$ أى $\frac{h^3}{V}$ حيث V حجم الجسم .

تمثل كل خلية حالة من حالات الطاقة الإلكترونية energy state ، والتى يشغلها

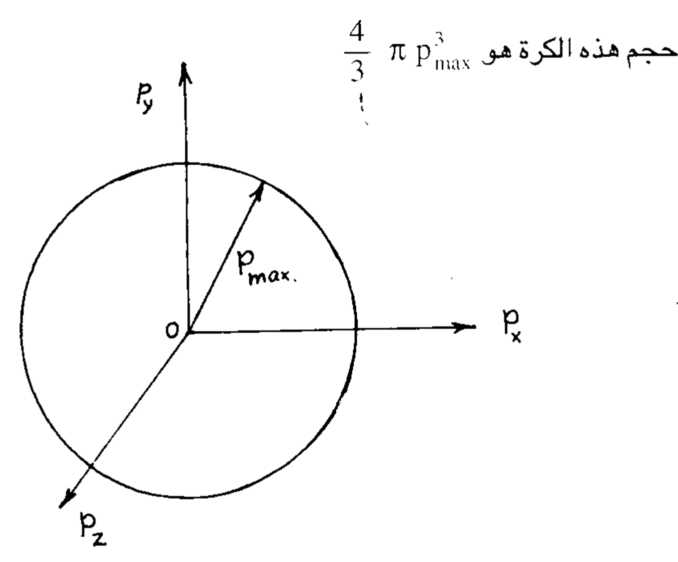
إلكترونان لفهما متعاكس تبعا لمبدأ باولى .

إذا بردنا الفلز إلى درجة الصفر المطلق فإن الإلكترونات تتجمع حول مركز الإحداثيات فى فراغ كمية الحركة .

« كلما اقتربت الخلية من مركز الإحداثيات كلما نقصت طاقة الإلكترونين بداخلها حيث إن بعد الخلية هو p كمية الحركة الكلية »

تمتلئ الخلايا القريبة من المركز O ويتجمع الغاز الإلكترونى داخل كرة متمركزة مع O نصف قطرها هو p_{max} ، ويسمى سطح هذه الكرة بسطح فيرمى Fermi surface ، شكل (١١ - ١٢) .

حجم هذه الكرة هو $\frac{4}{3} \pi p_{max}^3$



شكل (١١ - ١٢)

نفرض وجود n إلكترونات فى بلورة الفلز . يكون حجم فراغ كمية الحركة الذى يحتوى على جميع المستويات المشغولة عند درجة الصفر المطلق هو $\frac{h^3}{V} \cdot \frac{n}{2}$ ، وهذا هو نفس حجم كرة فيرمى . أى أن :

$$\frac{4}{3} \pi p_{max}^3 = \frac{n}{2} \cdot \frac{h^3}{V}$$

لكن طاقة حركة الإلكترون عند مستوى فيرمى للطاقة هو :

$$E_{max} = 1/2 \ m \ u^2_{max} = \frac{1}{2\,m} \ p^2_{max}$$

حيث E_{max} هو أكبر طاقة إلكترونية فى الغاز وهى طاقة فيرمى E_F ، ومن المعادلات السابقة تعطى طاقة فيرمى بالمعادلة :

$$E_F = \frac{h^2}{2\,m}\left(\frac{3\,n}{8\,\pi\,V}\right)^{2/3}$$

$$= \frac{h^2}{2\,m}\left(\frac{3\,N}{8\ \pi}\right)^{2/3}$$

حيث N هو تركيز الإلكترونات أو كثافتها فى الغاز ، وتساوى $N = \frac{n}{V}$ عدد الإلكترونات فى وحدة الحجوم من البلورة .

نستخلص مما سبق أن إلكترونات الفلز عند درجة الصفر المطلق تكون لها طاقات تتراوح بين الصفر وطاقة فيرمى E_F ، التى تعتمد على تركيز الإلكترونات وتصل قيمتها فى الفلزات المعتادة إلى بضعة إلكترون فولط .

ويلاحظ أن هذه القيمة كبيرة جدا بالنسبة لطاقة التهييج الحرارى k T thermal agitation ، والتى تبلغ حوالى ٠,٠٣ إلكترون فولط عند درجة حرارة الغرفة . وهذا يدل على أنه حتى عند درجات الحرارة المرتفعة المعتادة فى المعمل فإن عدد قليل جدا من هذه الإلكترونات هى التى تثار إلى مستويات أعلى للطاقة .

مثلا : عند درجة ١٠٠٠°م تكون تقريبا $kT = 0.1 \ e \ V$ وبالنسبة لفلز $E_F = 5 \ e \ V$ نجد أن مجموعة الإلكترونات تظل محللة حتى عند هذه الدرجة degenerate .

عند درجة حرارة فيرمى T_F حيث :

$$E_F = k\,T_F$$

يمكن للتهييج الحرارى $k \ T_F$ أن يصل إلى أصغر مستوى ممكن للطاقة ، ولذلك يمكن لكل المجموعة من الإلكترونات أن تثار . وعندئذ نستطيع تطبيق إحصاء ماكسويل وبولتزمان،

حيث إن المجموعة تصبح غير محللة non degenerate . تصل قيمة T_F للفلزات المعتاده إلى أكثر من $20000\ ^{\circ}K$.

طول موجة دى برولى المصاحبة لإلكترون عند مستوى فيرمى للطاقة :

إذا كانت سرعة الإلكترون عند مستوى فيرمى هى u_F تكون طاقته :

$$E_F = 1/2\, m\, u_F^2 = \frac{h^2}{2\,m}\left(\frac{3\,N}{8\,\pi}\right)^{2/3}$$

منها :

$$\therefore\ U_F = \frac{h}{m}\left(\frac{3\,N}{8\,\pi}\right)^{1/3}$$

وبتطبيق قاعدة دى برولى يصاحب هذا الإلكترون طول موجة تعطى بالمعادلة :

$$\lambda_{min} = \frac{h}{p_{max}} = \left(\frac{8\,\pi}{3\,N}\right)^{1/3}$$

$$= \frac{h}{(2\ m\ E_F)^{1/2}}$$

وتصل قيمة λ_{min} فى الأحوال المعتادة إلى حوالى ٦ أنجستروم ، وهى أكبر من البعد البينى بين ذرات البلورات المعتادة .

كثافة مستويات الطاقة Density of energy states :

تعرف كثافة مستويات الطاقة $N(E)$ بأنها عدد المستويات لكل وحدة طاقة فى وحدة الحجوم :

It is the number of energy states per unit energy range per unit volume

لإيجاد تغير الدالة $N(E)$ مع الطاقة E نفرض أن العدد الكلى لحالات الطاقة هو Ns لوحدة الحجوم :

$$\because \quad Ns = \int N(E)\, dE$$

ولكن من معادلة فيرمى :

عدد الإلكترونات N فى وحدة الحجوم هو :

$$N = \frac{\pi}{3}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2} E^{3/2}$$

وبالتعويض

$$\therefore \quad 2\int N(E)\, dE = \frac{\pi}{3}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2} E^{\frac{3}{2}} = N$$

وبالمفاضلة بالنسبة إلى E

$$\therefore \quad 2\, N(E) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2} . E^{1/2}$$

$$\therefore \quad 2\, N(E) = 1/2\ C . E^{1/2}$$

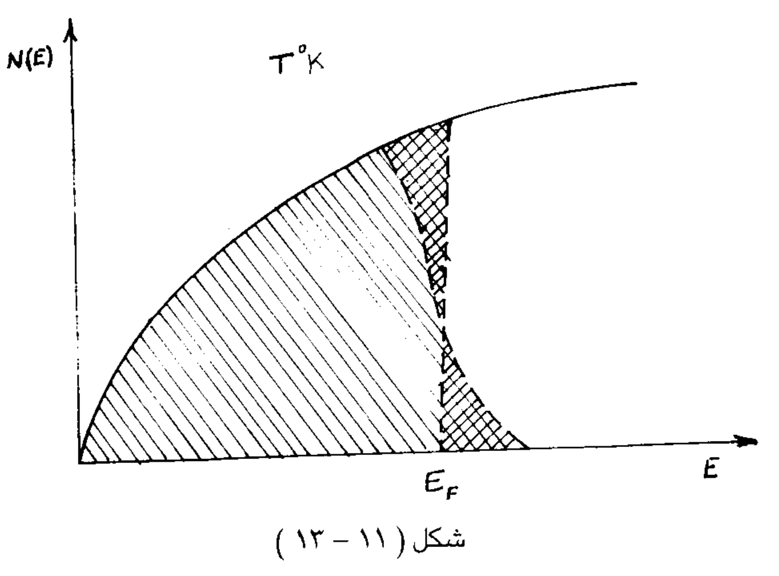
حيث

$$C = \frac{\pi}{2}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2}$$

أى أن العلاقة بين N(E) & E علاقة قطع مكافىء ، كما فى شكل ١١ – ٤ ، ويبين الجزء المظلل مستويات الطاقة المشغولة عند الصفر المطلق . ويبين الخط المتقطع المستويات المشغولة عند درجة T°K .

الحرارة النوعية الإلكترونية للفلزات Electronic specific heat :

الحرارة النوعية الناشئة عن الغاز الإلكترونى تنشأ بسبب الزيادة فى طاقة الإلكترونات القريبة من سطح فيرمى ، والتى يمكن إثارتها لمستويات أعلى .



شكل (١١ – ١٣)

عند درجة الحرارة $T°K$ تكون نسبة الإلكترونات المثارة إلى غير المثارة هى $\frac{kT}{kT_F}$

شكل (١١ – ١٣) ، فإذا كان عدد الإلكترونات فى وحدة الحجوم هو :

يكون عدد الإلكترونات المثارة $\frac{T}{T_F} \cdot N$ وذلك عند الدرجة $T°K$ ، وتكون بذلك طاقة الإلكترونات المثارة هى :

$$N \cdot \frac{T}{T_F} \cdot kT$$

= الطاقة الممتصة من التهييج الحرارى .

ومن تعريف . الحرارة النوعية الإلكترونية (تفاضل الطاقة بالنسبة لدرجة الحرارة)

نحصل على :

$$C_V = \frac{d}{dT}\left[\frac{Nk}{T_F} \cdot T^2\right]$$

$$= \frac{2NkT}{T_F} = \gamma\, T$$

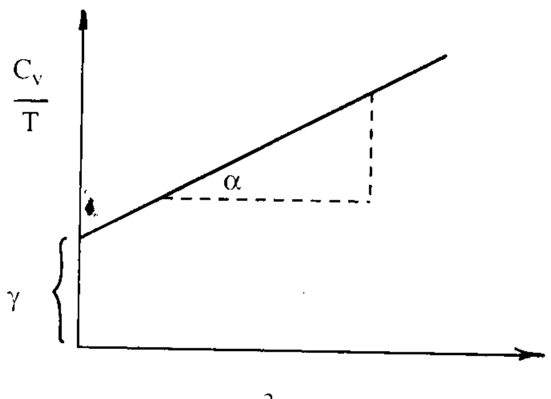
∴ تتناسب الحراره النوعيه الالكترونيه مع درجة الحراره المطلقه . ولكن الحرارة النوعية الكلية للفلز هى مجموع الحرارة النوعية الإلكترونية والحرارة النوعية الذرية ، وسنثبت فيما بعد نظرية ديباى للحرارة الذرية ، حيث C_V الذرية تتناسب مع T^3

أى أن :

$$(C_v)_{total} = \propto T^3 + \gamma T$$

وقيمة $(C_v)_{tot}$ هى التى تقاس عادة فى المعمل .

وبقياس الحرارة النوعية عند درجات الحرارة المختلفة ثم برسم العلاقة بين $\frac{C_V}{T}$ & T^2 كما فى شكل (١١ - ١٤)



شكل (١١ - ١٤)

ومن الرسم يمكن استنتاج قيمة ثابت التناسب γ ،

ومن المعادلة :

$$\gamma = \frac{2 N k}{T_F}$$

يمكن إيجاد درجة حرارة فيرمى T_F ، وكذلك طاقة فيرمى $E_F = kT_F$ عمليا .

إيجاد السرعة المتوسطة والطاقة المتوسطة للإلكترون عند درجة الصفر المطلقة .

نفرض منطقة صغيرة من الطاقة dE تقع بين E & $E + dE$ عدد مستويات الطاقة

في هذه المنطقة = $N(E)\ dE$.

عدد الإلكترونات التي تشغلها :

$$2\ f\ N(E)\ dE = \delta n(E)$$

وقد ضربنا في أثنين لأن كل مستوى يشغله إلكترونان . وكذلك في الدالة occupation probability function f لنحصل على العدد الفعلى للإلكترونات الموجودة عند الدرجة $T°K$.

$$f = \frac{1}{\left(e^{(E-E_F)/kT} + 1\right)}$$

وتساوى الدالة f واحداً صحيحاً عندما تكون الدرجة $T = 0°K$.

لأن جميع المستويات أقل من E_F تكون عندئذ مشغولة بإلكترونين .

عدد الإلكترونات فى المنطقة dE عند الدرجة $T°K$

$$\delta\ n(E) = \frac{2x\ 1/2\ C\ E^{\frac{1}{2}}\ dE}{\left(e^{(E-E_F)/kT} + 1\right)}$$

لكن:

$$E = 1/2\ m\ u^2$$

$$\therefore\ dE = m\ u\ d\ u$$

$$\therefore\ E^{1/2}\ dE = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2}\ m\ u^2\ d\ u$$

$$\therefore\ \delta\ n\ (u) = \frac{8\ \pi\ m^3\ u^2\ du}{h^3\left(e^{(E-E_F)/kT} + 1\right)}$$

عند درجة الصفر المطلق $f = 1$

ومن القوانين الإحصائية : السرعة المتوسطة للإلكترون :

$$\bar{u} = \int_0^{uF} u\ \delta n \Big/ \int_0^{uF} \delta n$$

لكن $\int_0^{uF} \delta n = N$ حيث N هو عدد مستويات الطاقة الكلية تحت E_F .

$$\therefore \; \bar{u} = \frac{1}{N} \int_0^{u_F} \frac{8 \pi m^3}{h^3} u^3 \, du$$

$$= \frac{8 \pi}{N} \; \frac{m^3}{h^3} \; \frac{u_F^4}{4}$$

لكن:

$$u_F = \frac{h}{m} \left(\frac{3N}{8\pi} \right)^{1/3}$$

$$\therefore \; \bar{u} = 3/4 \; u_F$$

وإذا كانت $\bar{E}$ هى الطاقة المتوسطة فى الغاز الإلكترونى

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{u_F} 1/2 \; m u^2 \, \delta n}{\int_0^{u_F} \delta n}$$

$$= \frac{1}{N} 1/2 \; m \int_0^{u_F} u^2 \, \delta n$$

$$= \frac{m}{2N} \cdot \frac{8 \pi}{h^3} m^3 \int_0^{u_F} u^4 \; d \; u$$

$$= \frac{4 \pi \; m^4}{N h^3} \cdot \frac{u^5 F}{5}$$

وباستخدام معادلتى u_F & E_F نحصل على :

$$\bar{E} = 3/5 \; E_F$$

مسـألة (١) أوجـد ضـغط الغـاز الإلكتـروني عند الصـفـر المطلق ، علمـا بأن $E_F = 5 \text{ ev}$ وكثافته الإلكترونية ١٠^٢٢ لكل سم^٣ .

الحل :

$$\therefore\ p = 1/3\, N\ m\ u^2$$
$$= 2/3\ N\ (1/2\ m u^2)$$
$$= 2/3\ N\ 3/5\ E_F$$

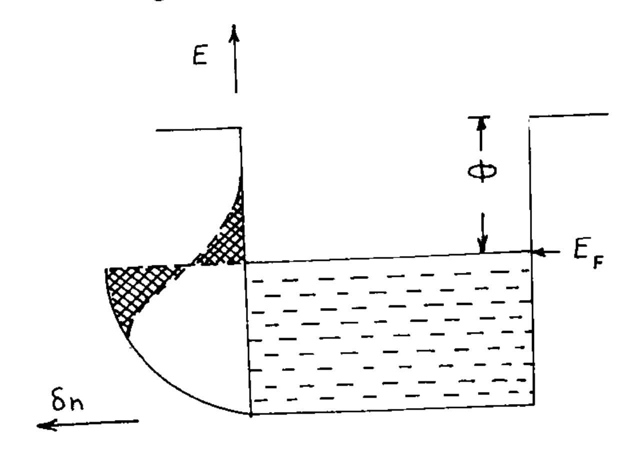
وقد عوضنا هنا بدلا من $1/2\ m\ u^2$ وهى الطاقة المتوسطة للإلكترون فى الغاز الإلكترونى بالقيمة $3/5\ E_F$

$$E_F = 5 \times 10^{-12}\ \text{ergs}$$
$$\therefore\ p = 2/3 \times 10^{22} \times 3/5 \times 5 \times 1.6 \times 10^{-12}$$
$$\therefore\ p = 3.2 \times 10^{10}\ \text{dynes / cm}^2$$

الانبعاث الثرميونى : Thermionic emission

الانبعاث الثرميونى هو هروب الإلكترونات من السطوح الساخنة للفلزات والمعادن وأشباه الموصلات ، وهو المصدر الرئيسى للإلكترونات فى الصناعة (الصمامات وأنابيب الفلورسنت ، إلخ) .

يوجد عند سطح أى جسم صلب حاجز طاقة enrgy barrier ϕ يقدر بعدة إلكترون فولط يمنع هروب الإلكترونات من الجسم انظر شكل (١١ - ١٥) . عند رفع درجة الحرارة تكتسب بعض الإلكترونات من الطاقة ما يسمح لها بأن تغادر الجسم وتصبح حرة .



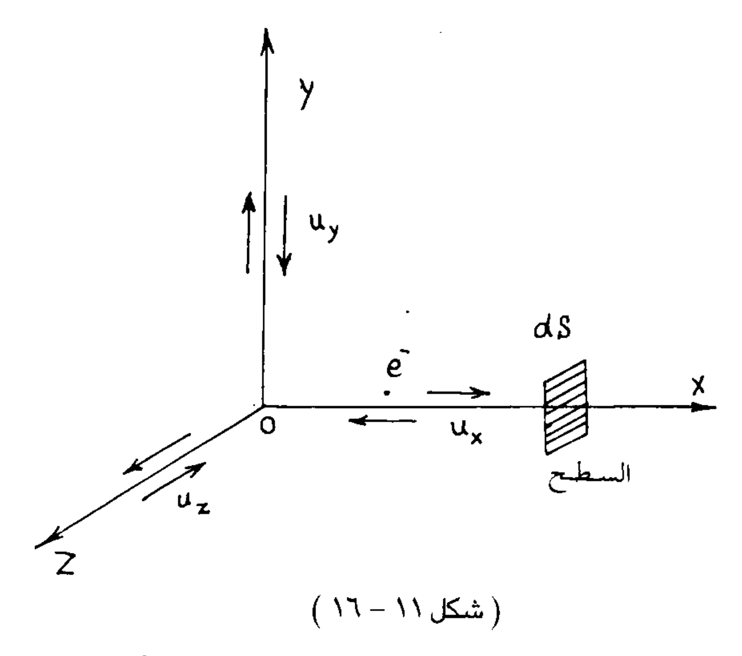
(شكل ١١ - ١٥)

يطلق على القانون الذى يربط عدد الألكترونات المنبعثة حراريا (التيار الثرميونى) ودرجة الحرارة بقانون رتشاردسون ودشمان .

قانون رتشاردسون ودشمان : Richardson - Dushman law

عندما يسخن جسم صلب طاقة فيرمى له E_F ودالة الشغل ϕ work function تتحرر فقط الإلكترونات التى تكون طاقاتها أكبر من $E > E_F + \phi$ وتعريف دالة الشغل هى : الطاقة التى يجب إعطاؤها للإلكترون الذى يشغل مستوى فيرمى للطاقة لكى يغادر نهائيا الجسم . هذا الشرط ضرورى ولكنه غير كاف ، إذ أن الإلكترون قد يكون له الطاقة المطلوبة ، ولكنه يتحرك فى غير اتجاه السطح أى لداخل الجسم .

اعتبر محاور إحداثيات x,y,z داخل الجسم . واعتبر جزءا من السطح الذى ينبعث منه الإلكترونات عموديا على محور x ، شكل (١١ - ١٦)



(شكل ١١ - ١٦)

معدل انبعاث الإلكترونات التى لها كمية حركة فى المنطقة بين p , $p + dp$ من وحدة المساحات من السطح الساخن هو :

$$u_x \quad n(p) \; d \; p$$

ولكن :

$$E = \frac{p^2}{2m} \qquad\qquad p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

$$\therefore \; \frac{\delta E}{\delta p_x} = u_x$$

معدل الانبعاث من وحدة المساحات :

$$\frac{\delta E}{\delta p_x} \; . \; n(p) \; . \; d\,p = n(p) \quad dE \;\; dp_y \, dp_z$$

وقد عوضنا عن $dp = dp_x \, dp_y \, dp_z$

سبق أن ذكرنا أن مستوى الطاقة يمثله الحجم $\frac{h^3}{V}$ فى فراغ كمية الحركة ، ويشغله إلكترونان فقط . باعتبار وحدة الحجوم من الجسم يكون عدد الإلكترونات لوحدة الحجوم فى فراغ كمية الحركة هى :

$$N(p) = \frac{2}{h^3}$$

وذلك بفرض أن جميع مستويات الطاقة مشغولة ، أى عند الصفر المطلق ، وعموما عند أى درجة حرارة $T^\circ K$ يصبح هذا العدد :

$$n(p) = \frac{2}{h^3} \; . \, f$$

حيث f هى دالة التوزيع لفيرمى وديراك وتساوى :

$$f = \frac{1}{\left(e^{(E-E_F)/kT} + 1 \right)}$$

وتكون بذلك الكثافة التيارية المنبعثة j ، وهى حاصل ضرب الشحنة الإلكترونية e فى معدل الانبعاث للإلكترونات ذات الطاقة $E_x > E_F + \phi$ والتى تصدم وحدة مساحات السطح فى اتجاه x هى :

$$j = e\,\frac{2}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{E_F+\phi}^{\infty}\frac{dp_y\,dp_z\,dE}{\left(e^{(E-E_F)/kT}+1\right)}$$

ولإيجاد قيمة هذا التكامل نضع :

$$\theta = \frac{E - E_F}{kT}$$

$$\therefore\ d\theta = \frac{dE}{kT}$$

ونضع أيضا :

$$E = E_x + E_y + E_z$$

$$= E_x + \frac{1}{2m}\left(p_y^2 + p_z^2\right)$$

$$\therefore\ \theta = \frac{1}{kT}\left[\left(E_x - E_F\right) + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m}\right] =$$

$$= \frac{1}{kT}\left[\theta + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m}\right]$$

وبالتعويض فى معادلة j وبمعرفة أن :

$$\int \frac{d\theta}{e^{\theta}+1} = \log\left(1 + e^{-\theta}\right)$$

نحصل على :

$$j = \frac{2kTe}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\log\left(1 + e^{-\theta}\right)dp_y\,dp_z$$

فى الظروف التجريبية المعتادة تكون $\theta >> 1$ ، ولذلك بفك اللوغاريتم والاكتفاء بالحد الأول فقط $e^{-\theta}$ نحصل على :

$$j = \frac{2kTe}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\theta}\,dp_y\,dp_z$$

وبالتعويض θ ما يساويها

$$\therefore \; j = \frac{2\,k\,T\,e}{h^3} \; . \; e^{-\phi/kT} \; . \; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(p^2y + p^2z\right)/2\,mkT} \, dp_y \, dp_z$$

وبمعرفة أن :

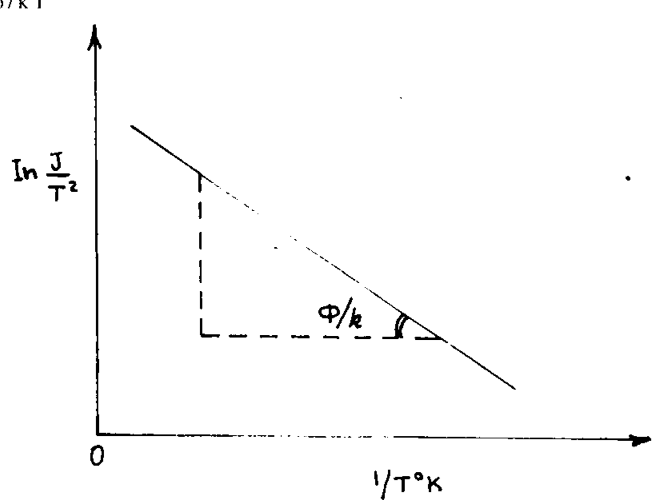
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

نحصل على :

$$j = \frac{2\,k\,Te}{h^3} \, . \, e^{-\phi/kT} \, . \, 2 \; m\,k\,T \, . \, \pi$$

$$= \frac{4\,\pi\,m\,e\,k^2}{h^3} \, . \, T^2 \, . \, e^{-\phi/kT}$$

$$\therefore \; j = A \; . \; T^2 \, . \, e^{-\phi/kT}$$



شكل (١١ – ١٧)

وتعرف هذه المعادلة بقانون رتشاردسون دوشمان

وبرسم العلاقة بين $\log_e \frac{j}{T^2}$ و $\frac{1}{T}$ نحصل على علاقة خطيه شكل (١١ – ١٧)

يعطى ميل الخط مباشرة النسبة ϕ / k .

وتعتبر هذه هى الطريقة العملية لإيجاد قيمة دالة الشغل ϕ للانبعاث الثرميونى ، حيث من السهل قياس شدة التيار الثرميونى j . باستخدام صمام ثنائى بسيط يمكن تسخين فتيلة لدرجات حرارة مختلفة ، يسهل قياسها بواسطة بيرومتر ضوئى وقياس شدة التيار فى كل حالة ثم من الرسم البيانى نوجد قيمة ϕ :

ويلاحظ أن الثابت $A = \frac{4\pi m e k^2}{h^3}$ له قيمة تبلغ ١٢٠ أمبير / سم^{٢} – درجة

كما إن دالة الشغل للمواد المختلفة تتراوح بين واحد وخمسة إلكترون فولط .

عمابوسف الكويتي

مسائل وتمارين الباب الحادى عشر

١ – باستخدام الإحصاء الكمى لفيرمى وديراك ، أوجد أكبر احتمال ديناميكى حرارى للحالات الماكروئية المختلفة فى مجموعة من ٤ نقط طور داخل خليتين بكل منهما ٤ حجرات .

الحل :

$$W_i = \frac{n!}{N_i!(n - N_i)}$$

الحالات الماكروئية هى :

(a) $N_i = 4 \quad N_j = 0$

(b) $N_i = 2 \quad N_j = 2$

(c) $N_i = 1 \quad N_j = 3$

(d) $N_i = 0 \quad N_j = 4$

أولا : الاحتمال الديناميكى الحرارى : الحالة الأولى :

(a) $W(i) = \frac{4!}{0!4!} = 1$

$W(j) = 1 \qquad W(a) = 1$

(b) $W(i) = \frac{4!}{2!2!} = 6$

$W(j) = \frac{4!}{2!2!} = 6$

$W(b) = 36$

(c) $W_i = \frac{4!}{1!3!} = 4$

$W_j = \frac{4!}{3!1!} = 4$

$W(c) = 16$

(d) $W_i = \frac{4!}{0!4!} = 1$

$W_j = 1$

$$W(d) = 1$$

أى أنه يحدث أكبر احتمال عندما يكون التوزيع متساويا فى الخليتين .

٢ – عرف فراغ الطور لغاز والاحتمال الديناميكى الحرارى له . إذا علم أن فراغ الطور مقسم إلى خليتين وأن به أربع نقط فقط . أوجد عدد الحالات الماكروئية والاحتمال الديناميكى الحرارى لكل حالة .

الحل :

الحالات الماكروئية خمس هى :

N_i	4	3	2	1	0
N_j	0	1	2	3	4

الاحتمال الديناميكى الحرارى هو :

$$W = \frac{N!}{\Pi N_i}$$

وتكون قيمته للحالات الماكروئية الخمس هى على الترتيب :

$$W(4,0) = 1$$
$$W(3,1) = 4$$
$$W(2,2) = 6$$
$$W(1,3) = 4$$
$$W(4,0) = 1$$

٣ – مجموعة من N جسيم ممثله فى فراغ طور مقسم إلى m خلية فإذا كانت طاقة الجسيم W واحدة لجميع الخلايا كما أن $N >> m$ ، فأوجد عدد النقط فى كل خلية وكذلك الطاقة الداخلية والانتروبيا للمجموعة .

الحل : عدد النقط فى كل خلية :

$$N_i = \frac{N}{m}$$

الطاقة الداخلية الكلية = عدد الجسيمات × طاقة الجسيم = $N\omega$

الإنتروبيا

$$\begin{aligned} S &= k \ln W \\ &= k\left[N \ln N - \Sigma N_i \ln N_i\right] \\ &= k\left[N \ln N - \sum_m \frac{N}{m} \ln \frac{N}{m}\right] \\ &= k\left[N \ln N - m \frac{N}{m} \ln \frac{N}{m}\right] \\ &= k N \ln m \end{aligned}$$

٤ – أوجد الاحتمال الديناميكى الحرارى لكل من

(أ) التوزيع الأكثر احتمالا

(ب) التوزيع الأقل احتمالا

لمجموعة مكونة من $١٠^{٦}$ جزيئات فى فراغ طور مقسم إلى ٥ × $١٠^{٥}$ خلية ، علما بأن طاقة الجزىء ω_1 واحدة لجميع الخلايا .

٥ – إذا فرضنا أن فراغ الطور مقسم إلى ثلاث خلايا ، وأن عدد النقط الكلى هو ٣٠ مقسمة بالتساوى فى هذه الخلايا ، وأن طاقة الجسيم فى الخلية الأولى ٢ جول وفى الثانية ٤ جول وفى الثالثة ٦ جول . احسب التغير فى عدد الجسيمات فى الخليتين الأولى والثانية ، علما بأن هذا التغير فى الثالثة يساوى –٢ عند الاستقرار الحرارى .

الحل :

$$\delta N_1 + \delta N_2 + \delta N_3 = 0$$

$$\delta N_3 = -2$$

أيضا بما أن الحالة مستقرة

$$\Sigma \ln N_i \quad \delta N_i = 0$$

$$\Sigma \; w_i \quad \delta N_i = 0$$

$$2 \delta N_1 + 4 \delta N_2 + 6 \delta N_3 = 0$$

$$\delta N_1 + \delta N_2 = 2$$

بحل المعادلتين :

$$\delta N_1 = -2$$

$$\delta N_2 = 4$$

٦ – فى تجربة شتيزن وجيرلاخ تترتب العزوم المغناطيسيه للذرات ، إما موازيه أو عكس موازية لاتجاه المجال . أوجد باستخدام الميكانيكا الإحصائية العزم المغناطيسى الكلى فى اتجاه المجال .

الحل : نفرض أن B هو العزم المغناطيسى للذرة فى اتجاه المجال و-B فى عكس اتجاه المجال .

بما أنه لا يوجد سوى مستويين للطاقة

إذن دالة التقسيم

$$Z = e^{-\omega_1 / kT} + e^{+\omega_2 / kT}$$

حيث الطاقة :

$\omega_1 = - BH$ فى اتجاه المجال

$\omega_2 = + BH$ فى عكس اتجاه المجال

$$Z = e^{-x} + e^{+x}$$
$$= 2 \cosh x$$

حيث :

$$x = \frac{BH}{kT}$$

عدد الذرات فى وحدة الحجوم فى مستويى الطاقة هما :

$$n_1 = \frac{n}{2} \; \frac{e^x}{\cosh \; x}$$

$$n_2 = \frac{n}{2} \; \frac{e^x}{\cosh \; x}$$

العزم المغناطيسى الكلى فى تجاه المجال :

$$M = B \; (n_1 \; - \; n_2)$$

$$= n \; B \; \frac{e^x \; - \; e^{-x}}{e^x \; + \; e^{-x}} = n \; B \; \tanh \; x$$

وإذا كانت × كبيرة نحصل على العزم :

$$M = n B$$

وإذا كانت × صغيرة يكون العزم .

$$M = \frac{n \; B^2 \; H}{k T}$$

وتكون القابلية المغناطيسية

$$X = \frac{n \; B^2}{k T}$$

٧ – أوجد قيمة طاقة فيرمى للتنجستن بفرض وجود إلكترونين حرين لكل ذرة . ثم أثبت أنه عند رفع درجة الحرارة إلى ٣٠٠٠° كلفن تختلف قيمة الطاقة بأقل من ٠٫٠١٪ .

٨ – احسب الحرارة النوعية الإلكترونية فى التنجستن بدلالة ثابت الغاز (اعتبر طاقة فيرمى له ٩ إلكترون فولط) .

٩ – أوجد عدد الإلكترونات التى تعبر وحدة المساحات فى وحدة الزمن داخل فلز فى درجة الصفر المطلق فى اتجاه ما .

ثم أوجد الكثافة التيارية المناظرة لهذه الحركة بالأمبير / سم٢ .

١٠ – أوجد الحركة الإزاحية drift mobility للإلكترونات (بالسم٢ / فولط ثانية) فى النحاس عند الصفر المطلق .

١١ – عدد الذرات فى وحدة الحجوم (سم٣) للصوديوم هى ٢.٥ × ١٠٢٢ ومعامل التوصيل له عند الصفر المطلق ، ٢.٣ × ١٠٥ أوم-١ سم-١ .

أوجد متوسط الزمن الحر وحركية الإلكترون فى الصوديوم عند الصفر المطلق .

١٢ – باستخدام إحصاء فيرمى أوجد طاقة فيرمى عند الصفر المطلق للإلكترونات فى الصوديوم . ثم أوجد قيمة ضغط الغاز الإلكترونى عند هذه الدرجة .

١٣ – احسب الحرارة الذرية للألومنيوم وللنحاس عند درجة ١ كلفن وقارن ذلك بالحرارة الإلكترونية .

للنحاس $E_F = 7.1 \ eV$

للألومنيوم $E_F = 11.7 \ eV$

درجة حرارة ديباى للألومنيوم $\theta = 398$

درجة حرارة ديباى للنحاس $\theta = 315$

١٤ – احسب ضغط الغاز الإلكترونى عند الصفر المطلق لمادة طاقة ، فيرمى لها خمسة إلكترون فولط .

الحل :

$$p = 1/3 \ N \ m \ v^2$$

$= 2/3$ (average energy)

$= 2/3 \ (3/5 \ E_F)$

ومنها

$$p = 3.2 \times 10^{10} \text{ dynes / cm}^2$$

١٥ – الوزن الذرى للصوديوم ٢٣ وكثافته ١ جم / سم^3 احسب عدد الإلكترونات الحرة لكل سم^3 فى الصوديوم ثم أوجد طاقة فيرمى . ما هو طول المسار الحر للإلكترونات فى الصوديوم ؟

(عدد أفوجادرو = ٦ × ١٠^{23} لكل جرام ذرة)

الحل :

عدد الذرات لكل سم^3 = عدد الإلكترونات الحرة

$$N = \frac{6 \times 10^{23}}{23}$$

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi} \right)^{2/3}$$

$$= 3 \text{ eV.}$$

١٦ – احسب حرارة فيرمى لشبه موصل ، علما بأن كثافة ناقلات الشحنة ١٠^{16} لكل سم^3 .

الحل :

$$E_F = 5 \times 10^{16} \text{ ergs}$$

$$= k \ T_F$$

$$\therefore T_F = 4 \text{ K .}$$

١٧ - أوجد طول الموجة المصاحبة لإلكترون حر فى شبه موصل عند درجة $27\ ^\circ C$.

١٨ - أثبت أن طاقة فيرمى $(E_F)_T$ عند درجة الحرارة $T\ k$ تتغير مع طاقة فيرمى عند الصفر المطلق $(E_F)_0$ وفقا للمعادلة :

$$E_F(T) = E_F(0)\ (1 - 2 \propto T)$$

حيث $\propto$ معامل التمدد الطولى للمادة .

١٩ - أوجد تغير طاقة فيرمى للصوديوم بين الصفر المطلق ودرجة الغرفة $27\ ^\circ C$ علما بأن $E_F(0) = 2.5\ eV$ & $\propto = 71 \times 10^{-6} / ^\circ K$.

٢٠ - أوجد حركية الإلكترونات فى الصوديوم والألومنيوم ، علما بأن موصليتهما على الترتيب هى $\sigma(N_a) = 22 \times 10^6$ ، $\sigma\ (A\ell) = 35 \times 10^6\ ohm^{-1} / m^{-1}$ وطاقة فيرمى لهما $E_F(N_a) = 3.2\ eV$ ، $E_F\ (A\ell) = 11.7\ eV$ ،
بماذا تفسر الفرق فى الحركية فى كل منهما ؟

٢١ - أثبت أن معامل الانضغاط K_e للغاز الإلكترونى تعطى بالمعادلة :

$$K_e = \frac{3}{2}\ \frac{V}{NE_F}$$

حيث V هو الحجم الذى يشغله عدد N إلكترونات ، E_F طاقة فيرمى .

٢٢ - يتجمد فلز على شكل طبقات أحادية كثيفة . فإذا علم أن لهذا الفلز إلكترونا واحداً فى مستوى الطاقة الأول S - state ، أثبت :

١ - أن $E_F = \dfrac{h^2 N}{4 \pi m}$ ، حيث N عدد الذرات للمتر المربع .

٢ – أوجد كثافة مستويات الطاقة N (E) بدلالة الطاقة E .

٣ – عين شكل منطقة بريلوين الأولى ، وأوجد عدد الإلكترونات التى تملؤها .

٢٣ – باستخدام دالة فيرمى للتوزيع الإلكترونى أوجد درجة الحرارة التى يكون عندها احتمال وجود إلكترون بطاقة أعلى من طاقة فيرمى بمقدار 0.5 eV هو ١ ٪ ، علماً بأن $E_F = 5.0$ eV .

٢٤ – أوجد التيار الثرمويونى لفتيل من التنجستن طوله 0.05 m وقطره 10^{-4} m ودرجة حرارته 2000 k عندما لا يؤثر عليه أى مجال خارجى .

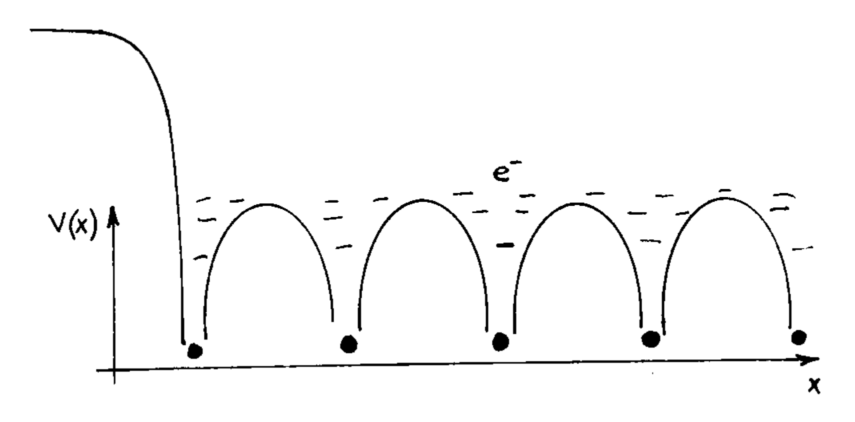
وإذا أثرنا بمجال كهربائى شدته 5×10^5 V / m عند سطح الفتيل ، فأوجد مقدار النقص فى دالة الشغل الثرميونى .

٢٥ – المقاومة النوعية للفضة عند درجة الغرفة هى 1.6×10^{-8} ohm.m . والعدد الفعال من إلكترونات التوصيل هو 0.9 لكل ذرة وطاقة فيرمى $E_F = 5.5$ eV . أوجد متوسط طول المسار الحر للإلكترونات وسرعتها الإزاحية فى مجال 100 V/m . ثم أوجد معامل التوصيل الحرارى للفضة . (كثافة الفضة 1.055×10^4 Kg / m^3) .

الباب الثانى عشر

نظرية المناطق Zone theory :

لم تستطع أي من النظرية الكلاسيكية أو النظرية الكمية للغاز الإلكترونى تفسير تلك الفوارق الضخمة فى التوصيل الكهربى للمواد المختلفة من عازلة إلى شبه موصلة إلى موصلة . لذلك أدخل فى نظرية المناطق الحديثة تأثير أيونات الشبيكة على الإلكترونات الحرة lattice ions .



شكل (١٢ - ١)

تتحرك الإلكترونات فى وجود بئر جهد دورى Periodic potential ، شكل (١٢-١) ، ناتج من ترتيب الذرات فى الشبيكة . فإذا كان الجهد عند النقطة × هو V (x) فإن معادلة شرودنجر الخطية فى اتجاه × تكون :

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V(x))\,\Psi = 0$$

وقد تمكن بلوخ Bloch من حل هذه المعادلة لتعطى نوعين من الحلول :

$$\Psi(x) = e^{\pm\mu x}\,u_k(x) \qquad (1)$$

$$\Psi(x) = e^{\pm ikx}\,u_k(x) \qquad (2)$$

بما أن الحل الأول غير محدود ، حيث إن الدالة الموجية Ψ (x) تؤول إلى مالا نهاية

عندما تؤول × إلى مالا نهاية ، لذلك فهذا الحل يمثل أمواج تقدمية progressive غير موجودة بالشبيكة . اما الحل الثانى فيمثل أمواجا موقوفة stationary waves .

فى الحلين السابقين k هو العدد الموجى $\frac{2\pi}{\lambda}$ wave mumber و u_k (x) هى دالة موجية لا تتوقف على الزمن ، ولكن على k فقط وهى دورية ، ولها نفس دورية الشبيكة a أى أن :

$$u_k\ (x + a) = u_k\ (x)$$

أى أن :

$$\Psi\ (x + a) = e^{\pm ik(x+a)}\ \ u_k\ (x + a)$$

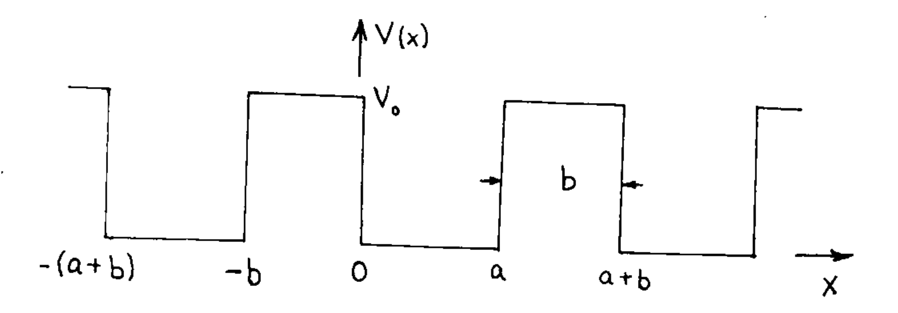
$$\therefore\ \Psi\ (x + a) = \Psi\ (x)\ .\ e^{\pm ika}$$

بما أن الحل الأول لا يعطى حالات موقوفة للإلكترون ، لذلك تختفى مناطق معينة من الطاقة لا يمكن أن يوجد بداخلها أى إلكترون ، وذلك لأنه لو حدث ذلك لكانت الموجة المصاحبة له موجة تقدمية تخضع للحل الأول ، ولذلك فأنها تختفى من داخل الجسم .

ويسمى الحل الثانى بدوال بلوخ Bloch functions

نموذج كرونيج وبنى Kronig - Penny model

لتوضيح وجود مناطق من الطاقة مسموح بها للإلكترون وأخرى ممنوعة عليه وضع كرونيج وبنى نموذجا من بعد واحد يمثل شبيكة خطية مكونة من ذرات تبعد عن بعضها مسافة (a + b) شكل (١٢ – ٢) ، يمكن تمثيل الخواص المميزة لانتشار الأمواج الإلكترونية على هذه الشبيكة بتركيب دوري مربع له نفس دورية الشبيكة ، ويمثل بئر الجهد الذى تتحرك عليه الإلكترونات .



شكل (١٢ - ٢)

اعتبر أن الجهد عند النواة يساوى صفراً ، وأن قيمته عند منتصف المسافة بين ذرتين متجاورتين هو V_0 .

دورية الشبيكة هى $a + b$ حيث b هو سمك حاجز الجهد a هو اتساع بئر الجهد .

لحل معادلة شرودنجر باستخدام هذا النموذج المبسط نعتبر دوال بلوخ التى تمثل موجات إلكترونية مستوية تشكلت بوجود دورية الشبيكة plane waves .

$$\Psi = u_k \quad e^{ikx}$$

بمفاضلة هذه المعادلة مرتين نحصل على

$$\frac{d\Psi}{dx} = e^{ikx} \frac{du}{dx} + iku\, e^{ikx}$$

&

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = e^{ikx} \frac{d^2u}{dx^2} + 2ik\, e^{ikx} \frac{du}{dx} + i^2k^2 u\, e^{ikx}$$

وبالتعويض فى معادلة شرودنجر ذات الجهد الدورى :

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V)\Psi = 0$$

نحصل على :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2ik\frac{du}{dx} - k^2u + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V)\, u = 0$$

وبوضع : $E_k = \dfrac{h^2k^2}{8\pi^2 m}$ نجد أن :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2ik\frac{du}{dx} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - E_k - V)u = 0$$

أولا : في المنطقة $0 < x < a$ أى داخل بئر الجهد يكون حل المعادلة السابقة على الصورة :

$$u_1 = A e^{i(\propto - k)x} + B\ e^{-i(\propto + k)x}$$

حيث :

$$\propto\ = \sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2} . E} = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} \qquad (I)$$

ثانيا : فى المنطقة $a < x < a + b$ أى داخل حاجز الجهد يكون حل المعادلة هو :

$$u_2 = C e^{(\beta - ik)x} + D e^{-(\beta - ik)x}$$

حيث :

$$\beta = \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2}(V_0 - E)\right)^{1/2} \qquad (II)$$

تتحدد قيمة الثوابت D, C, B, A من حالة الحدود Boundary conditions، بحيث تكون الدالة الموجية u ومعاملها التفاضلى $\frac{du}{dx}$ دوال متصلة وأحادية القيمة عند كل من :

$x = -b, x = a, x = 0$

ومن دورية الدالة u تكون قيمتها عند $x = a$ مساوية عند $x = -b$

$$\therefore\ u_1(a) = u_2(-b);$$

$$u_1(0) = u_2(0)\ ; \left(\frac{du_1}{dx}\right)_0 = \left(\frac{du_2}{dx}\right)_0;$$

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)_a = \left(\frac{du_2}{dx}\right)_{-b}$$

باستخدام حالات الحدود السابقة نحصل على أربع معادلات هى :

$$A + B = C + D \qquad (i)$$

$$i(\alpha - k)A - i(\alpha + k)B = (\beta - ik)C - (\beta + ik)D \qquad (ii)$$

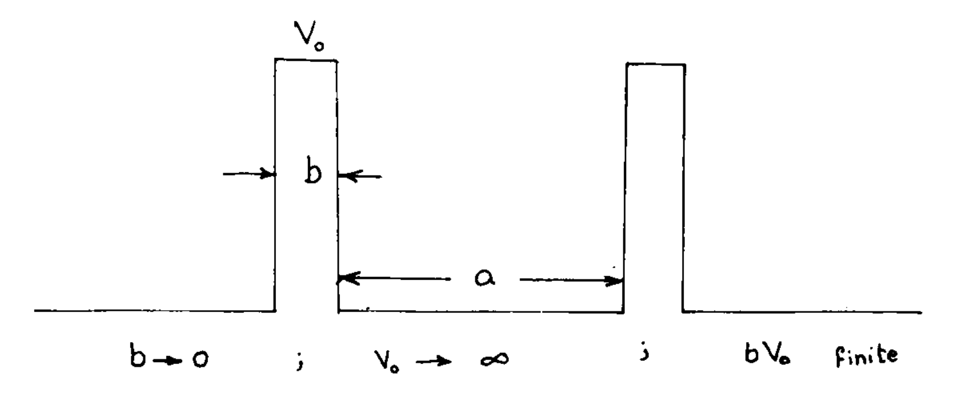
$$A e^{i(\alpha - k)a} + B\, e^{-i(\alpha + k)a} = C e^{-(\beta - ik)b} + D e^{(\beta + ik)b} \qquad (iii)$$

$$i(\alpha - k)A e^{i(\alpha - k)a} - i(\alpha + k)B e^{-i(\alpha + k)a}$$
$$= (\beta - ik)C e^{-(\beta - ik)b} - (\beta + ik)D e^{(\beta + ik)b} \qquad (iv)$$

يكون لهذه المعادلات الخطية حل إذا تلاشى قيمة المحدد المكون من معاملات D, C, B, A .

الحل النهائى يعطى بالمعادلة :

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta\alpha} \sinh \beta b \sin \alpha a + \cosh \beta b \cos \alpha a$$
$$= \cos(a + b) \,. \qquad \text{... (III)}$$



شكل (١٢ – ٣)

وللحصول على حل أبسط من هذا أجرى كرونيج وبنى التقريب التالى (انظر شكل ١٢-٣).

. اعتبر سمك حاجز الجهد b صغيرا جدا ويؤول للصفر ، كما اعتبر أن ارتفاع حاجز الجهد V_0 كبيرا جدا ويؤول إلى مالا نهاية .

ولكن حاصل الضرب bV_0 يظل محدود القيمة .

هذا التقريب لا يغير من طبيعة الحل النهائى ، ولكنه فقط يسهل إيجاد حل للمشكلة باستخدام الرياضة البسيطة كما يأتى :

أ - إذا كانت $V_0 \longrightarrow \infty$ فإن قيمة E تكون صغيرة نسبيا ، ولذلك نجد أن قيمة β (المعادلة II) تصبح :

$$\beta = \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2} \cdot V_0 \right)^{1/2}$$

ب - تختصر حدود المعادلة (III) كل على حدة كما يأتى :

$$1)\ \frac{\beta^2 - \propto^2}{2\beta\propto} \sinh \beta\, b \sin \propto a = \frac{\beta^2 - \propto^2}{2\beta\propto} \cdot \beta\, b. \sin \propto a$$

$$= \frac{\beta^2\, b}{2\propto} \sinh \propto a$$

وضعنا هنا $E\ ,\ b \longrightarrow 0$ أيضا صغيرة جدا بالنسبة إلى V_0 فهى تؤول للصفر . وكذلك قيمة ∝ يلاحظ أن $\beta^2 b$ هى $V_0 b$ وهى محدودة القيمة فرضا فلا تختصر .

بما أن $2 - \cosh \beta\, b \longrightarrow 1 \therefore\ b \longrightarrow 0$

$3 - \cos k\,(a+b) \longrightarrow \cos k\, a$

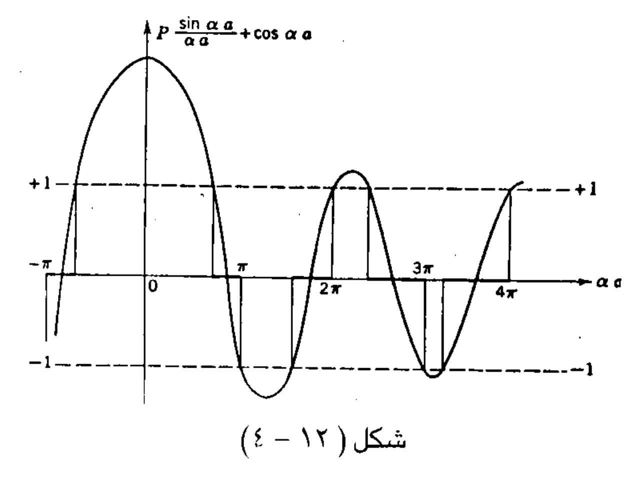
وبالتعويض في المعادلة III نحصل على :

$$\frac{\beta^2 b}{2\propto} \sin \propto a + \cos \propto a = \cos k\, a$$

وبوضع

$$p = \frac{\beta^2 ba}{2} = \frac{4\pi^2 m V_0\, ab}{h^2}$$

$$\therefore\ p\, \frac{\sin \propto a}{\propto a} + \cos \propto a = \cos k\, a \qquad \text{(IV)}$$



شكل (١٢ – ٤)

ولدراسة هذه المعادلة نرسمها بيانيا ، كما فى شكل (١٢ – ٤)

وليكن الطرف الأيسر بأكمله محوراً صادياً وليكن a ∝ هى المحور السينى . الطرف الأيمن من المعادلة IV ؛ cos ka تأخذ قيمة واحدة فقط لكل قيمة لـ k أى لكل قيمة طاقة إلكترونية E . كما أن دالة جيب التمام تجعل حدود التغير للطرف الأيسر من المعادلة لا تتعدى 1 ± هى قيم تغير cos k a ما بين أقل قيمة وأكبر قيمة .

لذلك فكل قيم a ∝ التى تعطى قيمة للطرف الأيسر فى المعادلة IV أكبر من + ١ أو أقل من –١ تعتبر غير حقيقية .

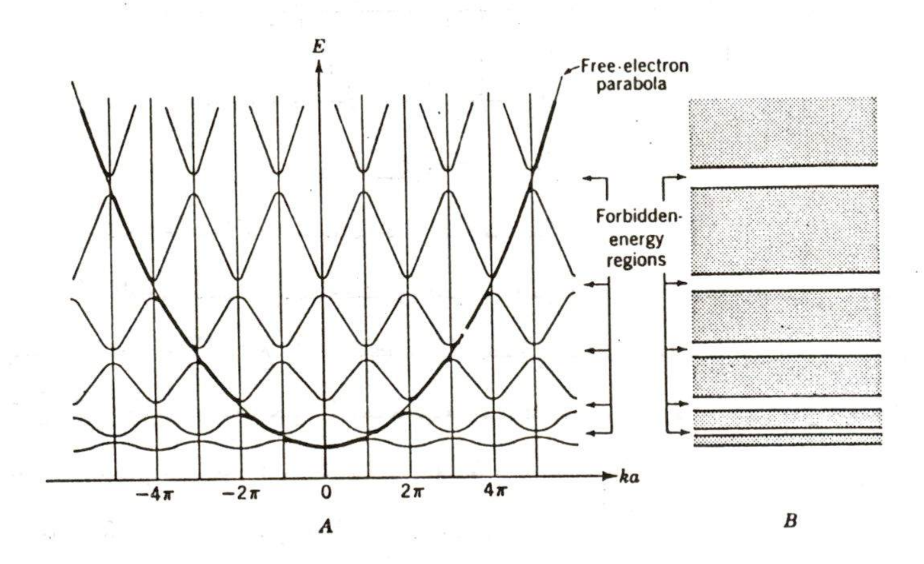
وبما أن

$$\propto = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} \quad (\text{I معادلة})$$

∴ يمثل المحور السينى a ∝ محورا للطاقة الإلكترونية ، وتكون بذلك قيم الطاقة الإلكترونية الممثلة بقيم a ∝ التى تعطى قيما للطرف الأيسر من المعادلة IV داخل الحدود 1± هى فقط القيم المسموح بها لطاقة الإلكترون ، أما القيم الأخرى التى تخرج بقيمة الطرف الأيسر عن هذا النطاق 1 ± فهى كلها قيم غير حقيقية أو بمعنى أخر قيم غير مسموح بها .

من هنا يتضح وجود مناطق للطاقة مسموح بها وأخرى غير مسموح بها Allowed

شكل (١٢ – ٥) . أى أن الجهد الدورى لذرات الشبيكة and forbidden energy bands قد أملى وجود مناطق ممنوعة من الطاقة الإلكترونية لا يمكن لأى إلكترون أن يتواجد بداخلها . ويلاحظ أنه كلما ازداد ارتفاع بئر الجهد (أى أن $V_0 b$ تزداد) نجد أن اتساع هذه المناطق المحرمة يقل .



شكل (١٢ – ٥)

برسم العلاقة بين طاقة الإلكترون ومقلوب طول الموجه المصاحب نحصل على شكل (١٢ – ٥) وفيه تظهر المناطق المحرمة من الطاقة .

يلاحظ وجود انقطاع فى المنحنى كلما كان $k = \frac{n}{a}$ أى عندما

$$n\lambda = 2a$$

حيث a هى المسافة بين الذرات .

هذه المعادلة هى نفس معادلة براج التى تعطى انعكاسا قويا للإلكترونات الساقطة عموديا على سطح البلورة .

وهذا يعنى أنه تبعا لقانون براج فإن أى إلكترون يتحصل داخل البلورة على طاقة

تدخله فى المنطقة المحرمة ، يتشتت وينعكس على المستويات الذرية فليس له وجود داخل البلورة لأنها لا تقبل وجوده بداخلها .

كتلة الإلكترون الفعالة فى البلورة

The effective mass of electrons :

فى النظرية السابقة اعتبرنا أن الإلكترونات فى البلورة عبارة عن أمواج مستقرة تشغل جميع حجم الجسم . ولكن لكى نعالج موضوع تأثير المجالات الكهربائية أو المغنطيسية على الإلكترونات ، يجب اعتبار الطبيعة الجسيمية للإلكترون وكيف ترتبط بالطبيعة الموجية له .

نعتبر الإلكترون جيب موجى Wave packet حيث تكون سرعة الإلكترون كجسيم particle velocity مساوية للسرعة الجموعية group velocity

المركبة السينية للسرعة الجموعية هى :

$$V_x = \frac{d\omega}{dk_x} = \frac{2\pi\, d\upsilon}{d\,k_x} = \frac{2}{h}\ \frac{dE}{dk_x} \qquad (E = h\upsilon) \qquad (1)$$

إذا أثرنا على البلورة بمجال كهربائى X فإن الشغل المبذول على الإلكترون بواسطة المجال فى الزمن الصغير δt هو :

$$\delta\omega = e\,.\,X_x\, v_x\, \delta t \qquad (2)$$

حيث مركبة القوة لإلكترون كمية حركته p_x فى اتجاه x هو F_x . بتفاضل المعادلة (1) نحصل على :

$$F_x = \frac{dp_x}{d\,t}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\pi}{h}\ \frac{dE}{dk_x}\right)$$

$$\therefore\ \frac{dv_x}{dt} = \frac{2\pi}{h}\ \frac{d^2E}{dk_x^2}\ .\ \frac{dk_x}{dt}$$

$$= \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{d^2E}{dk_x^2} \cdot \frac{dp_x}{dt} = \frac{1}{m^*} \cdot F_x$$

حيث :

$$\frac{1}{m^*} = \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{d^2E}{dk_x^2}$$

وقد وضعت المعادلة على هذه الصورة إذ أن $\frac{dv_x}{dt}$ تمثل عجلة ، كما أن $\frac{dp_x}{dt}$ هى قوة (قانون نيوتن) لذلك فإن المقدار m^* لابد أن يمثل كتلة وتعرف m^* بأنها الكتلة الفعالة للإلكترون effective mass .

بالنسبة لإلكترون حر تكون كتلته $m^* = m$ ولكن داخل البلورة فإن تأثير الشبيكة يجعل كتلته الفعالة مختلفة عن كتلته الحرة .

وعند التأثير بقوة على إلكترون البلورة فإن التغير فى كمية حركته داخل البلورة m^*v_x يختلف عن نظيره للإلكترون الحر mv_x هذا الفرق بين المقدارين لا يشكل كسرا أو خطأ فى قانون بقاء كمية اللحركة ، لأن هذا الفرق يؤخذ بواسطة الشبيكة . crystal momentum .

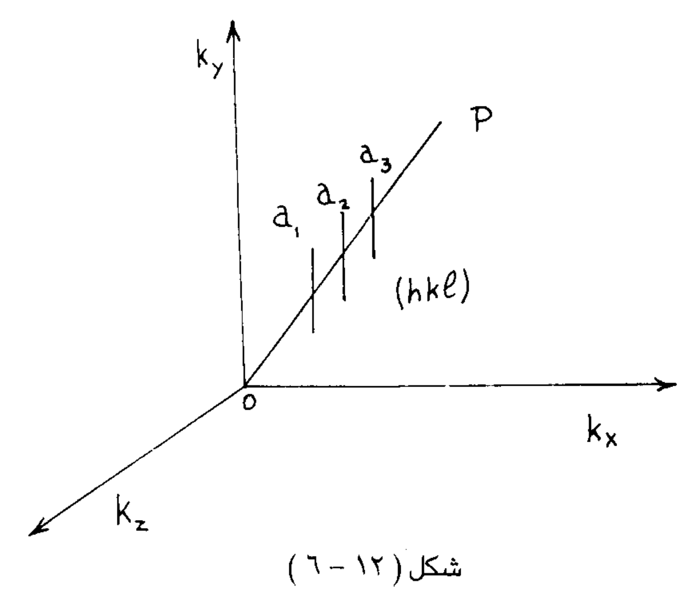
مناطق بريلوين Brillouin Zones :

لكى نتصور فيزيائيا لماذا نحصل على مناطق محرمة من الطاقة فى البلورات الحقيقية نفرض أن لدينا بلورة خالية تماما من الإلكترونات .. أى أن جميع مستويات الطاقة فيها فارغة .

ثم لنعتبر فراغ العدد الموجى wave number space نأخذ أى اتجاه مثل OP يمر بمركز الإحداثيات O ، شكل (١٢ - ٦) .

كل نقطة على هذا الخط تمثل عدداً موجيا معيناً . لنتصور الآن أننا بدأنا نملأ تدريجيا البلورة بالإلكترونات اللازمة لها . كلما أضفنا إلكترونات نجد أن مستويات الطاقة المنخفضة هى التى تملأ أولا بإلكترونين لكل مستوى .

وتكون دائما مستويات الطاقة المشغولة على شكل كرات تحيط بمركز الإحداثيات O الذى يكون فى المركز دائما .



شكل (١٢ - ٦)

ومن الواضح أنه كلما ازدادت قيمة k كلما نقصت طول الموجة المصاحبة للإلكترون λ.

إذا كان الاتجاه OP يمر مخترقا مجموعة من المستويات (h k l) المسافة العمودية بينها d (hkl) وكانت الزاوية التى يعملها هذا الاتجاه مع المستويات هى θ فإن الموجه الإلكترونية l المصاحبة لإلكترون متحرك فى هذا الاتجاه يمكن أن ينطبق عليها قانون براج

$$2\, d(hkl)\ \sin\ \theta\ =\ n\,\lambda$$

وعندئذ يحدث انعكاس قوى لهذه الموجه λ على هذه المستويات (h k l) أى عند ما تتحقق هذه العلاقة .

وهذا يعنى أنه بالنسبة لاتجاه مثل O P وبالنسبة لمستويات مثل (hkl) نجد متسلسله من النقط Series of points على هذا الخط يتحقق عند كل منها قانون براج مما يسبب اختفاء أى الكترون يكون له طاقة أى من هذه النقط ، وهذا يخلق سلسلة من الطاقات الممنوعة على هذا الخط عند تلك النقط .

وبتعميم ما سبق على جميع اتجاهات الفراغ مثل الاتجاه O P وبالنسبة لجميع

المستويات الذرية فى البلورة مثل (hkl) نحصل على مناطق محرمة من الطاقة تسمى مناطق بريلوين Brillouin ومن الواضح أن شكل مناطق بريلوين تعتمد أساسا على التركيب البلورى للشبيكة وعلى المسافات البينية بين مستويات الطاقة الذرية الكثيفة فى هذا التركيب.

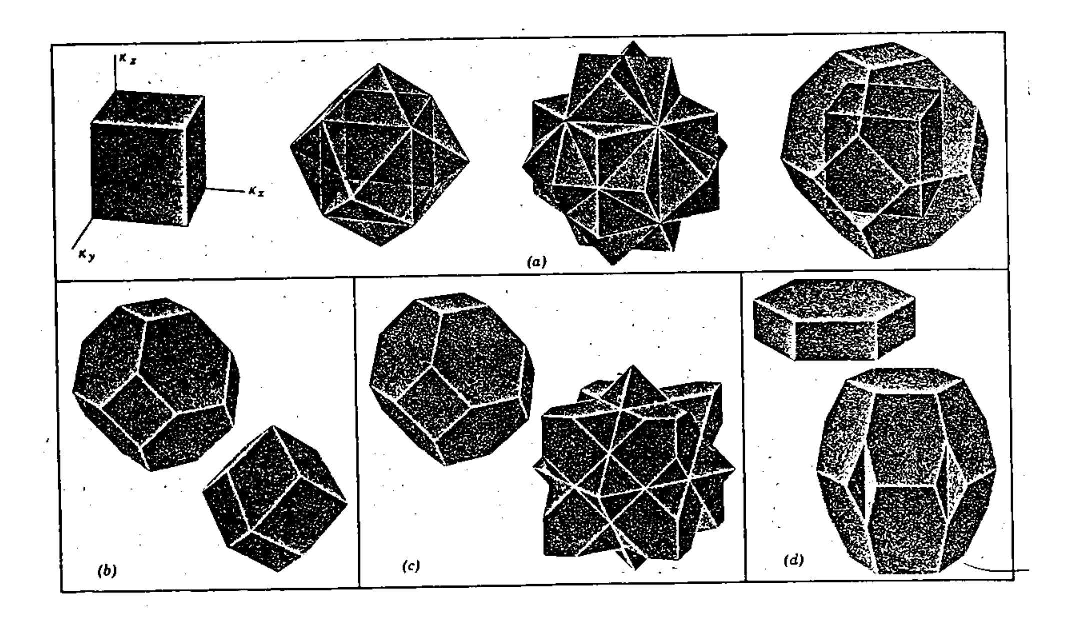
والامثلة فى شكل (١٢ - ٧) تبين

(a) أربعة مناطقة بريلوين للبنيه . S. C.

(b) منطقتين للبنيه b.c.c. .

(c) منطقتين للبنيه f.c.c. .

(d) منطقتين للبنيه h.c.c. .



شكل (١٢ - ٧)

منحنيات التوزيع الالكترونى Election distribution curves

سطح فيرمى Fermi surface

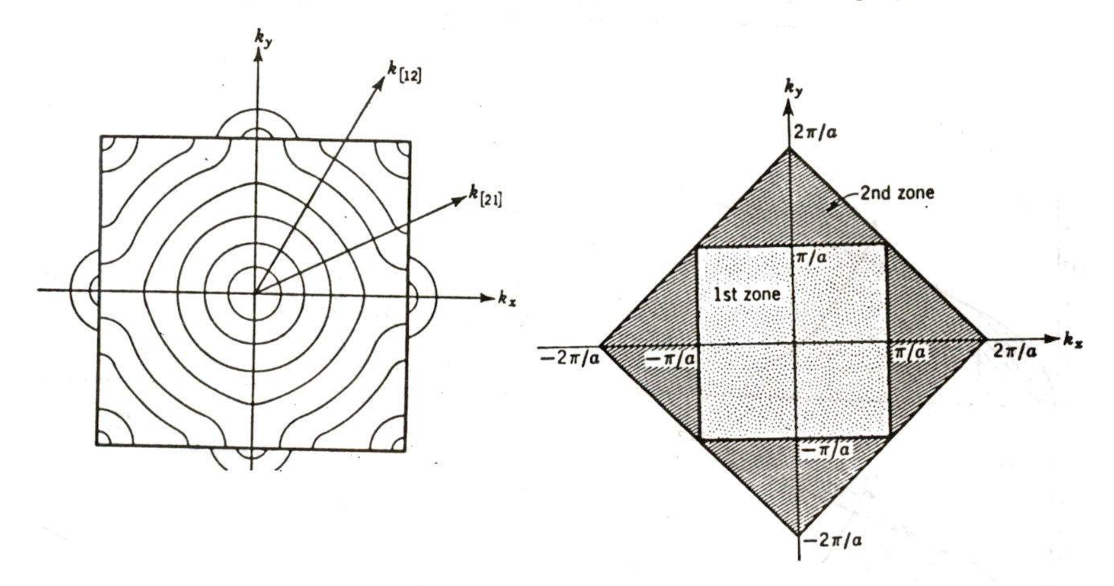
اعتبر فرضا بلورة ذات بعدين فقط 2 - D crystal وأنها خالية من الإلكترونات وأفرض أن التركيب البلورى لها يعطى منطقة بريلوين الأولى على شكل مربع .

ابدأ بملء الشبيكة تدريجيا بالإلكترونات .

إذا ما وصلنا النقط المختلفة فى فراغ متجه الموجه k - space والتى يكون لها نفس الطاقة الإلكترونية نحصل على أشكال دائرية طالما كنا بعيدين عن حدود منطقة بريلوين ، شكل (١٢ - ٨) .

تكون حركة الإلكترونات فى هذه الدوائر غير مقيدة ولكن اذا اقتربنا من حدود المنطقة نجد أن خطوط تساوى الطاقة energy contours تنتهى عند هذه الحدود إذ أن قيم k تكون أكبر فى الاركان عنها عند الجوانب مثلا $k\,(21) > k\,(10)$.

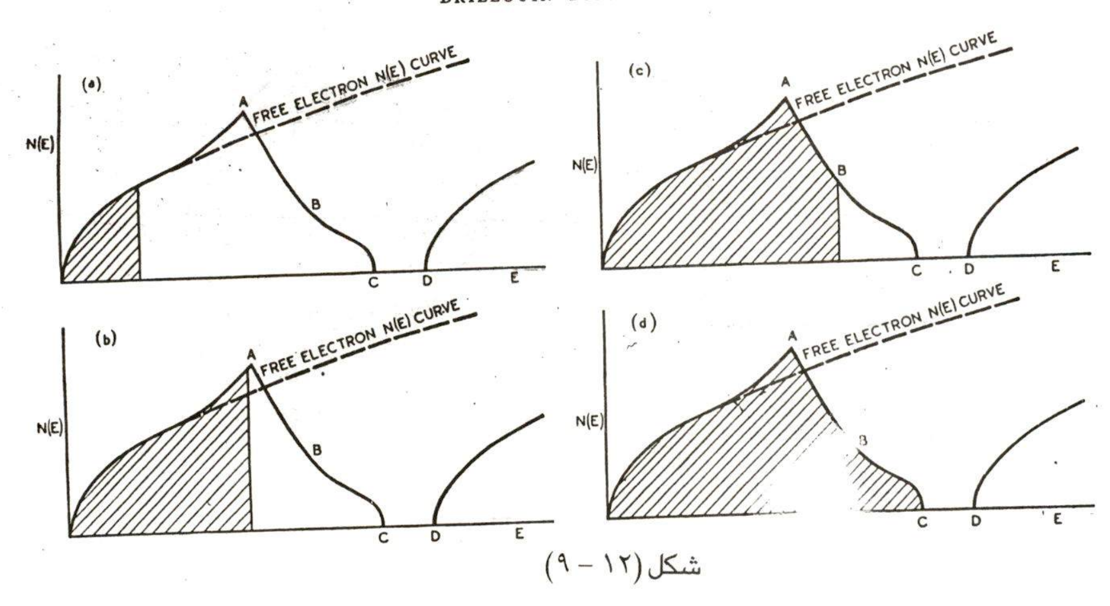
بالاستمرار فى اضافة الكترونات للبلورة تمتلىء أركان منطقة بريلوين الأولى تماما .



شكل (١٢ - ٨)

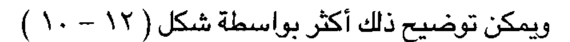
وبعد هذه المرحلة لن يدخل أى إلكترون فى المنطقة الثانية إلا إذا كانت طاقته من الكبر بحيث يستطيع تعديه المنطقة الممنوعة للطاقة بين منطقتى بريلوين الأولى والثانية ، شكل (١٢ - ٩)

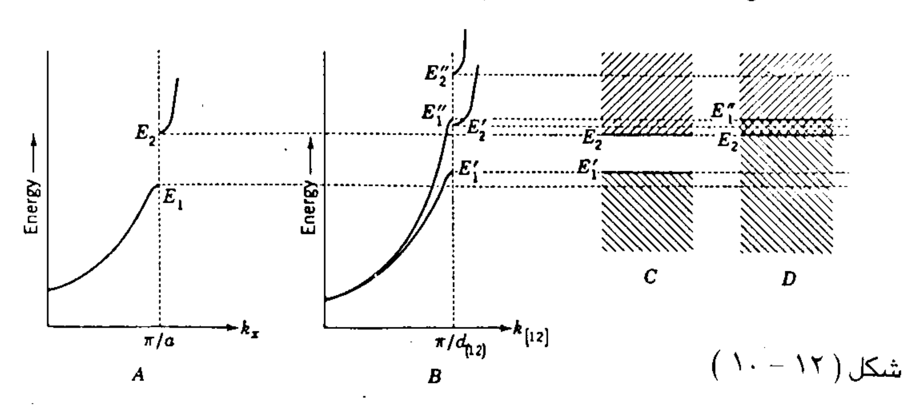
أحيانا يكون أول حدود منطقة بريلوين الثانية عند مستوى من الطاقة أقل من مستوى الطاقة المناظر لأبعد حدود منطقة بريلوين الأولى أى أن هناك تلاحما بين المنطقتين overlap . فى هذه الحالة يمكن للإلكترونات أن تبدأ فى شغل مستويات الطاقة فى المنطقة الثانية قبل الانتهاء تماما من شغل مستويات الطاقة فى المنطقة الأولى ، كما مبين بشكل (١٢-٩) .



شكل (١٢ - ٩)

تمثل أشكال (B & A) منطقة بريلوين الأولى وهى ممتلئة جزئيا بالإلكترونات فى الشكل C تبدأ الإلكترونات فى الدخول للمنطقة الثانية قبل الإنتهاء من شغل جميع مستويات الطاقة الأولى وذلك لأن مستويات الطاقة فى المنطقة الثانية عندئذ تكون ميسورة أكثر من المستويات الباقية فى المنطقة الأولى .


ويمكن توضيح ذلك أكثر بواسطة شكل (١٢ - ١٠)



شكل (١٢ - ١٠)

أعتبر E_1 . $E_1^{|}$. $E_1^{||}$ هى حدود الطاقة لمنطقة بريلوين الأولى بالنسبة لثلاثة اتجاهات فى الفراغ وإن E_1 ، $E_1^{|}$ ، $E_1^{||}$ طاقة القاع bottom لمنطقة بريلوين الثانية لنفس هذه الاتجاهات .

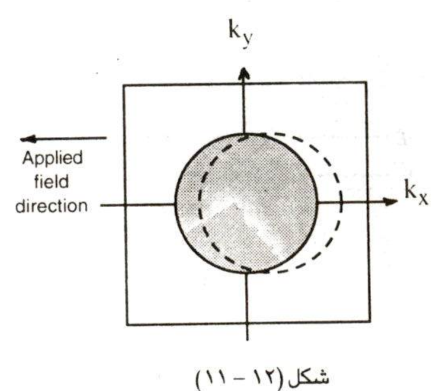
أولا : إذا كان E_2 أكبر من E_1 , $E_1^{|}$ بالنسبة للاتجاهات المختلفة فى الفراغ ، فإننا نحصل على مناطق غير متداخلة وتوجد عندئذ non overlapping zones ثغرة فى الطاقة energy gap ، وتكون مثل هذه المادة عازلة كهربائيا إذ أن إلكترونات المنطقة الأولى لا تستطيع الحركة إلى داخل المنطقة الثانية إلا إذا قفزت فوق ثغرة الطاقة .

ثانيا : أما إذا كانت $E_1^{|}$ أكبر من E_2 فإننا نحصل علي مناطق بريلوين متداخلة ويكون الإلكترون عندئذ حر الحركة داخل المنطقتين الأولى والثانية ، مما يسهل عملية التوصيل الكهربائى وتكون مثل هذه المواد مواد موصلة .

تعريف المادة الموصلة كهربائيا :

هى المادة التى تكون منطقة بريلوين لها مملوءة جزئيا partially filled بالإلكترونات . عندما نؤثر على المادة بمجال كهربائى نجد أن مجموعة الإلكترونات تزاح فى عكس اتجاه المجال ، وذلك لأن كل إلكترون يستطيع أن يجد مستوى شاغرا للطاقة يجاوره ، شكل (١٢-١١) .

وكنتيجة لإزاحة الإلكترونات نحصل على تيار كهربائى ، ولذلك تكون المادة موصلة جيدة للتيار . نفس هذا التعليل ينطبق على المواد التى تكون فيها مناطق بريلوين متداخلة وتسمح بحركة الإلكترون .



شكل (١٢ - ١١)

المادة العازلة :

هى المادة التى يكون فيها مناطق بريلوين غير متداخلة وبينها ثغرة طاقة ، كما أن المنطقة الداخلية ملوءة تماما بالإلكترونات . لا يستطيع الإلكترون الحركة تحت تأثير المجال الكهربائى إلا إذا اكتسب طاقة تسمح له بالقفز فوق ثغرة الطاقة .

المادة شبه الموصلة :

إذا كانت المنطقة الداخلية مملودة تماما (Valence band) وكانت ثغرة الجهد صغيرة نسبيا ، بحيث يمكن للإلكترون بواسطة التهيج الحرارى kT أن يقفزها إلى منطقة التوصيل conduction band تكون المادة شبه موصلة مثل السيليكون النقى . فى درجات الحرارة المنخفضة تكون المادة عازلة بينما رفع درجة الحرارة يحولها إلى مادة موصلة .

يوجد بعض المواد العازلة أصلا يمكن تحويلها إلى مواد شبه موصلة بإدخال شوائب فيها . تسمح هذه الشوائب بمستويات للطاقة داخل ثغرة الطاقة ، مما يسهل انتقال

الإلكترون منها أو إليها .

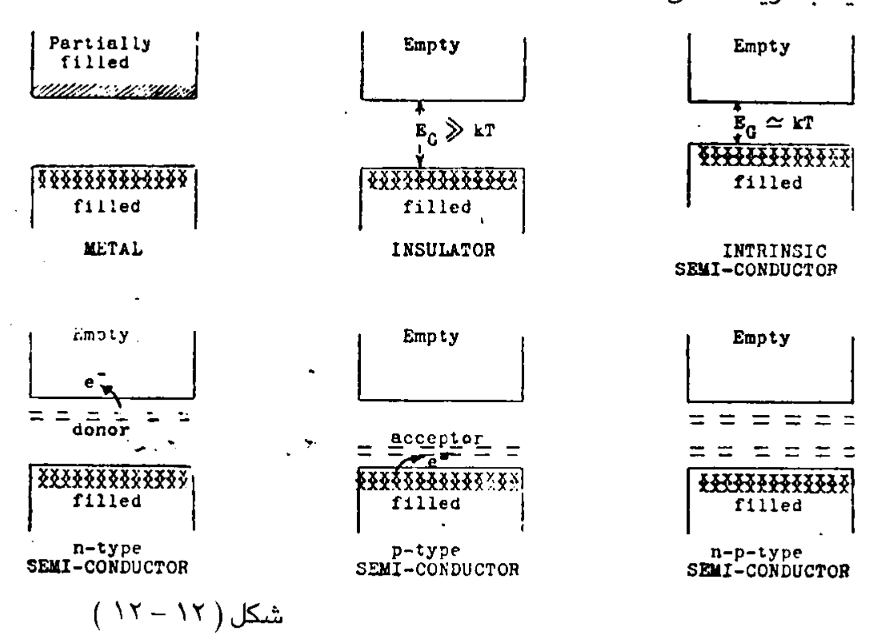
إذا كانت مستويات الطاقة التى أدخلتها الشوائب فى ثغرة الطاقة للمادة الأصلية قريبة من منطقة التوصيل conduction band فإن الإلكترون يقفز من الشائبة impurity atom لمنطقة التوصيل ، ويساهم فى عملية التوصيل ويسمى هذا النوع n -type semiconductor .

أما إذا كانت مستويات الطاقة داخل الثغرة قريبة من منطقة التكافؤ valence band فإن الإلكترونات تقفز من هذه المنطقة إلى مستويات الطاقة الأعلى والقريبة منها تاركة وراءها فراغات موجبة positive holes ، يمكن لها أن تتحرك فى منطقة التكافؤ وتساهم فى عملية التوصيل .

ويسمى هذا النوع p - type semiconductor

ويمكن تصنيع مادة شبه موصلة تكون من النوعين السابقين ، وتسمى n - p - type semiconductor .

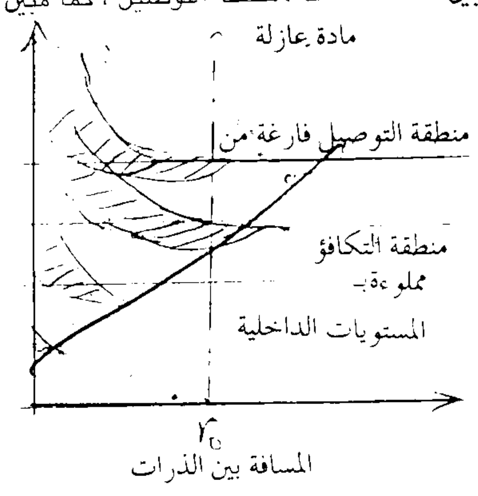
ويبين شكل (١٢ - ١٢) أنواع المواد المختلفة من موصلة إلى شبه موصلة إلى عازلة مستعينا بنظرية المناطق .



شكل (١٢ - ١٢)

التوصيل بواسطة الإلكترونات والثقوب :

تنقسم مستويات الطاقة الإلكترونية عند اقتراب الذرات من بعضها ، ففى حالة المواد الموصلة جيدا تنطبق المستويات بما يسمح بحركة الإلكترونات بحرية لمستويات الطاقة الأعلى فى عملية التوصيل الكهربى . أما فى حالة العوازل والمواد شبه الموصلة فيوجد طاقة ثغرة بين منطقة التكافؤ ومنطقة التوصيل ، كما مبين بشكل (١٢ – ١٣) .



شكل (١٢ – ١٣)

عندما يخرج إلكترون من منطقة التكافؤ فى شبه موصل يترك مكانه ثقبا موجبا positive hole يمكنه أن يتحرك فى منطقة التكافؤ بتأثير مجال كهربائى خارجى ، وينشأ عن انتقاله تيار كهربى . أى أنه من الممكن حدوث توصيل كهربى بواسطة الإلكترونات أو الثقوب أو بالإثنين معا ، ولكن تكون حركة الإلكترونات فى منطقة التوصيل فى عكس اتجاه المجال الكهربى المؤثر ، بينما تتحرك الثقوب فى منطقة التكافؤ فى اتجاه المجال .

موصلية المادة σ هى $\sigma = J / E$ حيث J الكثافة التيارية ، E شدة المجال الكهربى المؤثر . وباعتبار أن التيار قد نشأ عن حركة عدد n إلكترونات فى وحدة الحجوم بسرعة متوسطة v فى منطقة التوصيل تكون الكثافة التيارية $J = n . e . v$

وتكون الموصلية σ_e الناشئة عن الإلكترونات هى :

$$\sigma_e = n\ e\ \frac{v}{E} = n\, e\, \mu_e$$

حيث μ_e هى حركية الإلكترونات فى منطقة التوصيل .

ولما كانت الثقوب تحدث تيارا كهربيا بنفس الصورة ، تكون أيضا الموصلية الناشئة عن الثقوب σ_p فى منطقة التكافؤ هى :

$$\sigma_p = p \cdot e \mu_p$$

حيث μ_p هى حركية الثقوب فى منطقة التكافؤ ، p هو عدد الثقوب فى وحدة الحجوم بها . وتكون الموصليه الكلية لشبه الموصل هى :

$$\sigma = n e \mu_e + p e \mu_p$$

ولكن $p = n$ فى شبه الموصل الذاتى ، لذلك فإن :

$$\sigma = n e \left(\mu_e + \mu_p \right)$$

وإذا كان N هو عدد الإلكترونات فى وحدة الحجوم فى منطقة التكافؤ يمكن أن يقفز طاقة الثغرة منها عدد n إلكترونات عند درجة الحرارة T ، ويتكون عندئذ عدد n ثقوب فى الموصل الذاتى . يتغير عدد الإلكترونات والثقوب مع درجة الحرارة وفقا للمعادلة :

$$n = N e^{-E_G / 2kT}$$

حيث E_G هى طاقة الثغرة بين منطقتى التكافؤ والتوصل ، k ثابت بولتزمان . وبذلك تصبح موصلية شبه الموصل الذاتى هى :

$$\sigma = N e \left(\mu_e + \mu_p \right) e^{-E_G / 2kT}$$

وتوضح هذه المعادلة أن موصلية شبه الموصل تزداد وفقا لدالة أسية لدرجة للحرارة . وبهذا تتمايز أشباه الموصلات عن الموصلات الفلزية التى تتناقص موصليتها طرديا مع درجة الحرارة .

ولإيجاد طاقة الثغرة E_G عمليا نوجد تغير لموصلية σ مع درجة الحرارة T وبرسم العلاقة بين $(\ln \sigma)$ & (I/T) نحصل على خط مستقيم ، ميله يساوى طاقة الثغرة مقسوما على ضعف ثابت بولتزمان .

أشباه الموصلات العارضة Extrinsic semi conductors :

مستويات طاقة الثغرة بين منطقتى التكافؤ والتوصيل هى مستويات طاقة محرمة على الإلكترونات . إذا أضفنا قدراً ضئيلاً جدا من الشوائب قد يصل إلى جزء فى الألف مليون

يتكون نوعان من أشباه الموصلات العارضة extrinsic يطلق عليهما موجب النوع p-type وسالب النوع n-type وفقا لما تسببه هذه الشوائب من وفرة فى الثقوب الموجبة أو الإلكترونات السالبة على الترتيب . ومن أمثلة النوع الأول السيليكون أو الجرمانيوم إذا أضيفت له شوائب ثلاثية التكافؤ مثل الأنديوم . ومن أمثلة النوع الثانى السيليكون أو الجرمانيوم مضاف إليه شوائب خماسية التكافؤ مثل الأنيتمون . فمن المعروف أن لذرة الجرمانيوم أو السيليكون أربعة إلكترونات تكافؤ وأن هذه المواد تتبلور على صورة شبيكة الماس حيث عدد التناسق يساوى اربعة . ولذلك فالروابط بين الذرات المتجاورة روابط تساهمية . عند إضافة ذرة أنتيمون خماسية التكافؤ إلى السيليكون مثلا ، فإن أربعة فقط من إلكتروناتها الخمسة تشترك فى الروابط التساهمية مع الجيران السيليكون الأربعة ويتبقى إلكترون حر يستطيع أن يساهم فى عملية التوصيل الكهربى عند التأثير بمجال كهربى خارجى ، ولذلك تسمى هذه بالشوائب المعطاءة donor ، لأنها تعمل على زيادة كثافة حاملات الشحنة السالبة فى منطقة التوصيل ، ويسمى شبه الموصل فى هذه الحالة n-type، إذ أن التوصيل الكهربى فيه يتم على أساس انتقال الإلكترونات فى منطقة التوصيل .

أما فى حالة إضافة شوائب ثلاثية التكافؤ كالأنديوم أو الجاليوم تتكامل الروابط التساهمية الأربع مع ذرات السيليكون المجاوره بأن تأخذ كل شائبة إلكترونا من منطقة التكافؤ ويصير مكانه ثقبا موجباً positive hole حر الحركة فى فراغ الشبيكة ويكون مسئولا عن عملية التوصيل الكهربى ويطلق على الشوائب فى هذه الحالة شوائب مستقبلة acceptor حيث إنها بقبولها للإلكترونات تحدث زيادة كبيرة فى الثقوب الموجبة وهى حاملات الشحنة الموجبة المسببة للتيار الكهربى . ويسمى هذا النوع p - type أى شبه الموصل موجب النوع.

مسائل وتمارين علي الباب الثاني عشر

١ – أثبت أنه فى شبيكة مربعة بسيطة (ذات بعدين) تكون طاقة حركة إلكترون حر عند احد أركان منطقة بريلوين الأولى أكبر من نظيره عند منتصف الوجه للمنطقة بمقدار الضعف .

٢ – ماذا تكون نسبة الطاقة الإلكترونية $E(111) / E(100)$ عند حدود منطقة بريلوين الأولى لشبكة تكعيبية بسيطة . S C ؟ ثم أثبت أن هذه المنطقة تشكل مستوى الطاقة الأول (1 -S state) .

٣ – تتغير طاقة الكترون فى منطقة التكافؤ فى فلز تكعيبى بسيط تبعا العلاقة

$$E = A\ k^2 + B$$

حيث $A = 10^{-38}\ J . m^{-2}$ ، B ثابت .

أوجد الكتلة الفعالة للإلكترون بالنسبة لكتلته الحرة . ثم أوجد عدد إلكترونات التكافؤ لكل ذرة ، وطاقة ترابط الفلز .

٤ – ارسم منطقتى بريلوين الأولى والثانية لشبيكة بسيطة ثنائية البعد محوراها $a\ \&\ \sqrt{3}\,a$

٥ – اعتبر شبيكة مربعة بعدها الشبيكى $3\ \text{°A}$. عند أي قيمة لكمية حركة الإلكترون يكون سطح منطقة بريلوين الأولى ؟ وما هى طاقة الإلكترون عندئذ ؟

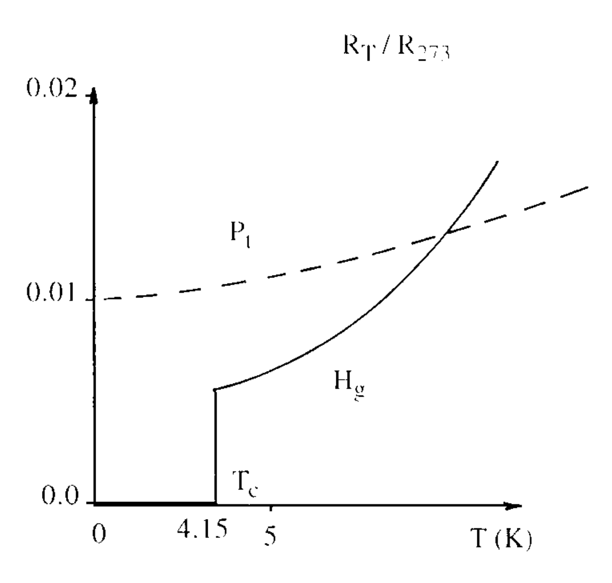
٦ – علل لماذا لا توجد مستويات طاقة إلكترونية محرمة فى الفلزات . ثم أثبت أن الكتلة الفعالة للإلكترون تساوى كتلته الحرة ؟

الباب الثالث عشر

الموصلية الفائقة SUPER CONDUCTIVITY

اكتشاف الموصلية الفائقة :

اكتشف اونز Onnes عام ١٩١١ أن المقاومة الكهربية للزئبق المتجمد تنخفض إلى الصفر تقريبا عند درجات حرارة أقل من درجة حرجة $T_c = 4.15$ K ، مما يوحى بتغير حالة المادة تغيرا جذريا وتختلف فى تصرفها عن سلوك المادة العادية التوصيل كالبلاتين مثلاً ، كما مبين فى شكل (١٣ – ١) .

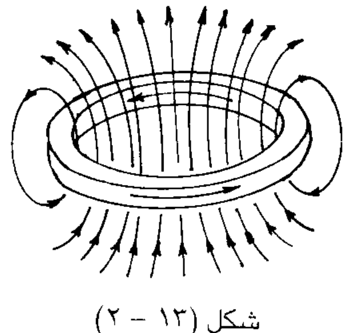


شكل (١٣ – ١)

وبعد اكتشاف ظاهرة التوصيل الفائق فى الزئبق وجد أن مواد أخرى كثيرة تتمتع بنفس الخاصية ، كما وجد أن بعض السبائك والمركبات السيراميكية تظهر موصلية فائقة عند درجات حرارة أعلى بكثير من تلك التي تظهر عندها فى الفلزات النقية .

ليس للموصل الفائق أية مقاومة كهربية على الإطلاق لذلك إذا أدخلنا تيارا كهربياً فى دائرة تتكون من سلك فائق التوصيل فإن التيار الكهربى يستمر فى السريان طالما استمرت للسلك موصليته الفائقة ، ويسمى التيار حينئذ بالتيار المداوم persistent current شكل

(١٣- ٢) ، وقد أمكن فى أحد المعامل استمرار سريان تيار مداوم بدون انقطاع لمدة سنتين ونصف ، دون أى مصدر كهربى ولم يقف التيار إلا بعد الامتناع عن التبريد للموصل الفائق ما حوله لموصل معتاد له مقاومة للتيار تسببت فى إيقافه .

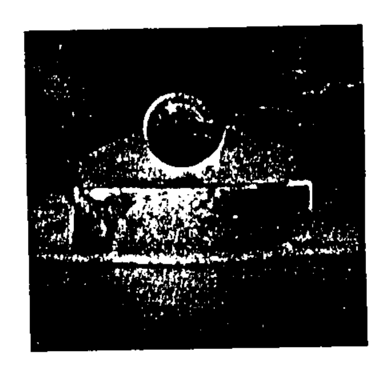


شكل (١٣ - ٢)

خواص الموصلات الفائقة

١ - ظاهرة الرفع Levitation effect

تحدث التيارات المداومة فى دوائر الموصلات الفائقة مجالات مغنطيسية ، ينشأ عنها ظاهرة الرفع المثيره التى تظهر بعض الأجسام وكأنها عائمة فى الهواء فوق الموصل الفائق. فإذا أسقطنا مثلا مغنطيسيا صغيرا فوق موصل فائق ينشأ مجال مغنطيسى تأثيرى يقاوم حركة السقوط ، وذلك لتكون تيارات مداومة تأثيرية على سطح الموصل الفائق ، وتزداد شدة هذه التيارات باقتراب المغنطيس من الموصل وفقا لقانون لنز Lenz's يكون التنافر قويا مع المغنطيس وينتج عن ذلك رفعه فى الهواء وكأنه عائما غير مرتكز على شيء. شكل(١٣-٣).



شكل (١٣ - ٣)

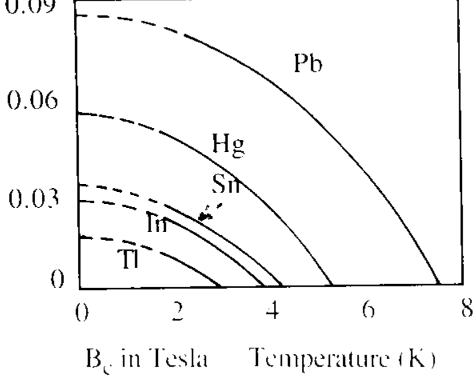
وتستفيد حاليا التكنولوجيا الحديثة من ظاهرة الرفع فى تصميم قطار يتحرك مرفوعا فوق القضبان مما يجعل حركته أسهل وأسرع ، ولذلك يطلق عليه اسم القطار الرصاصه أو القطار بدون احتكاك . Frictionless train .

٢ - المجال المغنطيسى الحرج .

تتكون مجالات مغنطيسية قوية عند مرور التيارات المداومة فى ملفات من موصلات فائقة . من الناحية النظرية يمكن زيادة شدة التيار المداوم ، وبالتالى شدة المجال المغنطيسى المصاحب بدرجة لانهائية . ولكن وجد عمليا أنه إذا زاد المجال المغنطيسى عن حد معين

يسمى بالمجال الحرج H_c ، تختفى تماما ظاهرة التوصيل الفائق وتتحول المادة إلى مادة عادية التوصيل . ويعرف المجال الحرج بأنه أقل مجال مغنطيسى يفقد عنده الموصل الفائق موصليته الفائقة . ويطلق على الموصلات الفائقة التى لها مجال حرج واحد بأنها من النوع الأول Type I superconductor.

وتختلف قيمة المجال الحرج باختلاف الموصل ، كما أنها تقل كلما ارتفعت درجة الحرارة كما مبين بشكل (١٣ - ٤) وقد وجد أن شدة المجال الحرج المزيل للموصلية الفائقة تتغير مع درجة الحرارة المطلقة وفقاً للمعادلة التقريبية :



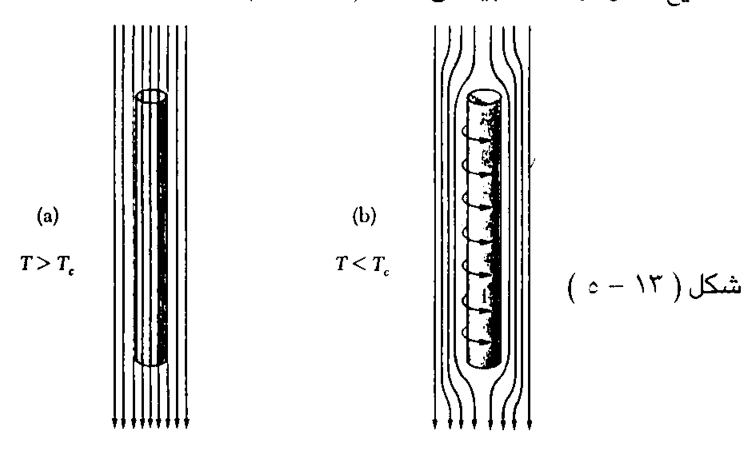
شكل (١٣ - ٤)

$$H_c(T) = H_c(0)\left[1 - (T/T_C)^2\right]$$

حيث $H_c(T)$ هو المجال الحرج عند درجة T ، $H_c(0)$ عند الصفر المطلق.

٣ - أثر ميزنر Meissner Effect

عند وضع اسطوانة من موصل فائق فى مجال مغنطيسى ينعدم بداخلها المجال الكهربائى نتيجة لمقاومته الصفرية . وهذا يعنى أن معدل تغير المجال المغنطيسى يتلاشى داخل الموصل الفائق . أى أن خطوط القوى المغنطيسيه تطرد خارج الاسطوانه ولا تستطيع أختراقها كما مبين فى شكل (١٣ - ٥)



شكل (١٣ - ٥)

عند ملامسة المجال المغنطيسى لاسطوانة الموصل الفائق تتكون تيارات تأثيرية على السطح تمنع نفاذ خطوط القوى المغنطيسية داخلها ، وهذا هو تصرف الموصل التام الذى لا يتكون بداخله أية مجالات مغنطيسية . وتؤدى التيارات السطحية على الموصل الفائق عملية التوصيل الكهربائى .

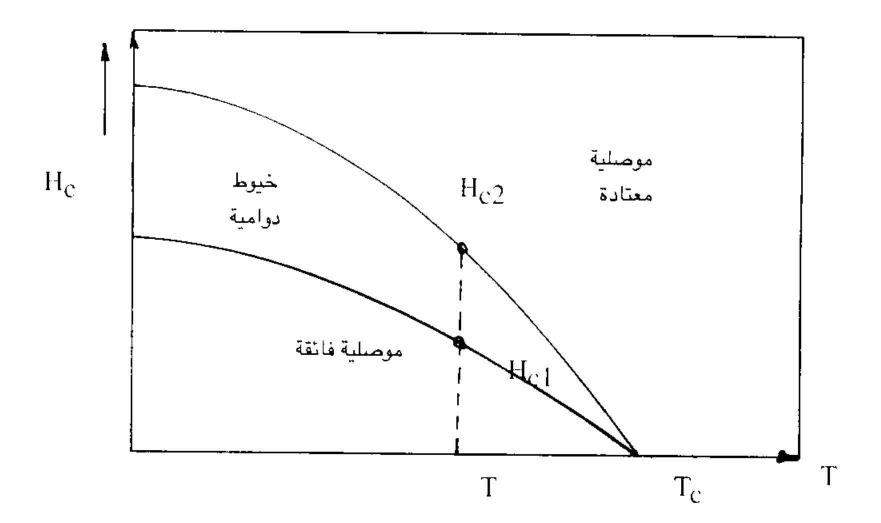
تسمى ظاهرة طرد الموصل الفائق لجميع خطوط القوى المغنطيسية لخارجه بأثر ميزنر Meissner effect . ويلاحظ أن تصرف الموصل الفائق فى المجال المغنطيسى يشبه تماما تصرف المادة الديامغنطيسيه من حيث تنافرها مع المجال ، إذ يعتمد الحث المغنطيسى B فى أى مادة على المجال المغنطيسى المؤثر H والعزم المغنطيسى M وفقا للمعادلة :

$$B = \mu_0 H + M$$

وبتطبيق أثر ميزنر للموصل الفائق يكون $B = 0$ وبالتالى تكون $M = -\mu_0 H$ أى أن القابلية المغنطيسية سالبة ، ولذلك فالموصل الفائق مادة ديامغنطيسية تامة تكملة الفيض المغنطيسى

النوع الثانى من الموصلات الفائقة Type II Superconductors

يميز الموصل الفائق من النوع الأول مجالا مغنطيسيا حرجاً واحداً ، يتحول بعده الموصل الفائق إلى موصل معتاد . أما الموصلات الفائقة من النوع الثانى فلها مجالان مغنطيسيان حرجان H_{c1} & H_{c2} عند درجة حرارة معينة (شكل ١٣ - ٦) . عند زيادة شدة المجال المغنطيسى عن H_{c1} تبدأ خيوط دوامية vortex lines فى إختراق الموصل الفائق وتنقسم المادة إلى مناطق ذات توصيل فائق واخرى موصليتها معتادة . وعند زيادة شدة المجال يزداد حجم المناطق ذات الموصلية المعتاده على حساب مناطق الموصلية الفائقه حتى اذا ما وصلت شدة المجال المغنطيسى إلى القيمة الحرجه الثانيه H_{c2} تكون جميع اجزاء الموصل الفائق قد تحولت إلى التوصيل المعتاد . لذلك يتميز النوع الثانى من الموصلات الفائقه بوجود مجالين مغنطيسيين حرجين لكل درجة حرارة .



شكل (١٣ - ٦) المجالات الحرجة لموصل فائق من النوع الثانى عند الدرجات المختلفة .

شكل (١٣ - ٦)

المجالات الحرجة لموصل فائق من النوع الثانى عند الدرجات المختلفة

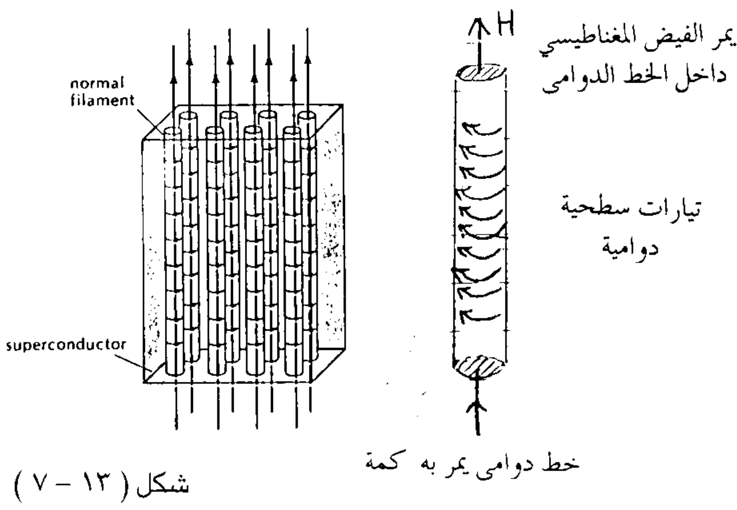
تعمل الخيوط الدوامية على إمرار بعض الفيض المغنطيسى خلال الموصل الفائق . وبدهى أن تكون مادة الموصل الداخلة فى هذه الخيوط ذات موصليه معتاده لتسمح بمرور خطوط القوى المغنطيسية . ولما كانت هذه الخيوط تشكل حزما من خطوط القوى المغنطيسيه الملامسه للموصل الفائق لذلك تتكون تيارات تأثيرية على سطوحها كالدوامات تحمى باقى اجزاء الموصل التى لا تزال على حالتها من الموصليه الفائقة ، تحميها من اختراق المجال المغنطيسى لها . (انظر شكل ١٣ - ٧) .

وقد وجد أن كل خيط دوامى يحتوى على كمة واحدة من الفيض المغنطيسى تساوى ثابت بلانك مقسوما على ضعف شحنة الإلكترون

$$\phi_0 = h / 2e$$
$$= 2.07 \times 10^{-7} \quad T . m^2$$

كما وجد بالتجربة أن زيادة شدة المجال المغنطيسى لا يزيد من كثافة الفيض المغنطيسى فى كل خيط دوامى ، ولكن يزداد عدد الخيوط التى تخترق الموصل الفائق وتصير كالحزمة

الكثيفة . وفى النهاية عندما تصل شدة المجال إلى قيمته الحرجة الثانية H_{c2} تكون المادة قد تحولت إلى مادة عادية التوصيل تخترق جميع أجزائها خطوط القوى المغنطيسية وتختفى الموصلية الفائقة من المادة .

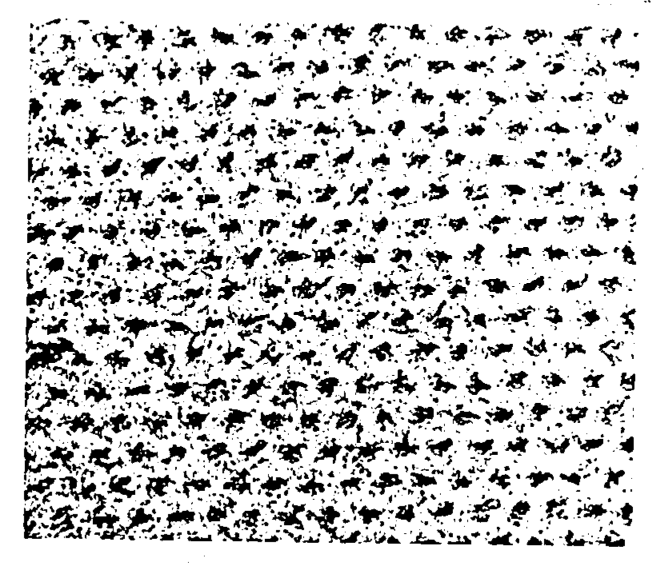


شكل (١٣ - ٧)

وتجرى التجربة البسيطة التالية لإثبات أن كل خط دوامى لا يمر فيه سوى كمة واحد من الفيض المغنطيسى $(\phi_0 = 2.07 \times 10^{-7})$ وهى تجربة شبيهة بتجربة بيتر لإظهار الحدود المغنطيسية .

يوضع محلول غروى به مسحوق من مادة مغنطيسية كالمجنتيت فوق سطح أملس من موصل فائق من النوع الثانى ، ونؤثر عليه بمجال مغنطيسى تقع شدته بين H_{c1} & H_{c2} أى فى المنطقة التى تحدث فيها الخطوط الدوامية . تنجذب ذرات المسحوق المغنطيسى لنهايات الخطوط الدوامية ، حيث يمر المجال المغنطيسى ، فيظهر شكل منتظم من الأكوام للمسحوق الأسود اللون ، وإذا ازدادت شدة المجال الخارجى المؤثر تزداد الكثافة العددية للأكوام كما مبين بشكل (١٣ - ٨) . ويمكن إيجاد عدد الخطوط الدوامية من عدد هذه النهايات وأيضا بقياس شدة المجال المغنطيسى المؤثر يمكن إيجاد كثافة الفيض المغنطيسى فى كل خط دوامى ، تساوى $\phi_0 = h / 2 c$ ، ولا تندمج أبدا الخطوط بزيادة المجال ولكن

تكون حزما كثيفة ، حتى تتحول المادة إلى موصل معتاد إذا ما زادت شدة المجال على القيمة الحرجة الثانية ، H .



شكل (١٣ - ٨)

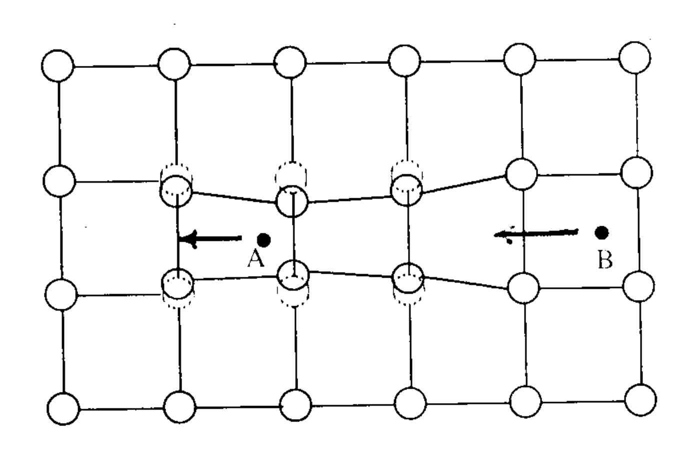
ميكانيكية التوصيل فى الموصلات الفائقة : The BCS Theory

يحدث التوصيل الكهربائى فى الموصلات الإلكترونية بانتقال إلكترونات التوصيل تحت تأثير المجال الكهربائى فيمر التيار . وتبين المقاومة الكهربية مقدار استطارة الإلكترونات بالفعل البينى مع فونونات الشبيكة وكذلك بتصادمها مع بعضها البعض ومع الشوائب وعيوب الشبيكة وقد وجد أنه حتى عند درجة الصفر المطلق ، حيث تسكن حركة الإلكترونات والفونونات تظهر بعض المقاومة المتبقية فى جميع الموصلات المعتادة .

إذا كيف نفسر تلاشى المقاومة تماما في الموصل الفائق عند درجات الحرارة بين الصفر المطلق والدرجة الحرجة ؟ لقد وضع باردين وكوبر وشريفر نظرية تعرف باسمهم BCS theory لتفسير ميكانيكية التوصيل فى الموصل الفائق على أساس الفعل البينى بين الإلكترونات الحرة وفونونات الشبيكة وإمكان تكون أزواجا من الإلكترونات توجد بين إلكترونى

كل زوج قوة ترابط بخلاف ما تمليه النظريات الكلاسيكية من وجود تنافر كولومى بين الشحنات المتشابهة وسميت هذه الأزواج الإلكترونية بأزواج كوبر Cooper pairs ، وهى التى تشكل حاملات الشحنة عند التوصيل الفائق ، وينشأ عن حركتها التيار المداوم وظاهرة الموصلية الفائقة .

ولكى نفهم كيف يحدث تجاذب بين الكترونى كوبر نبدأ بالإلكترونات الحرة داخل الموصل ، هذه الإلكترونات تؤثر على الأيونات الموجبة للشبيكة محدثة بها استقطابا فى شحناتها الموجبة ، فيزداد تركيز الشحنات الموجبة مكان مرور الإلكترون (A مثلا فى شكل (١٣ - ٩) فتعمل هذه الزيادة على جذب الكترون آخر B يكون فى الجوار حينئذ ، وبذلك يتبع الإلكترون A الإلكترون B فيظهر كما لو كانت هناك قوة تجاذب بينهما ، والحقيقة أن ترابط الإلكترونين يكون بواسطة الفعل البينى للإلكترون مع فونونات الشبيكة ، ويوضح شكل (١٢ - ٩) كيفية تكون أزواج كوبر .



شكل (١٣ - ٩)

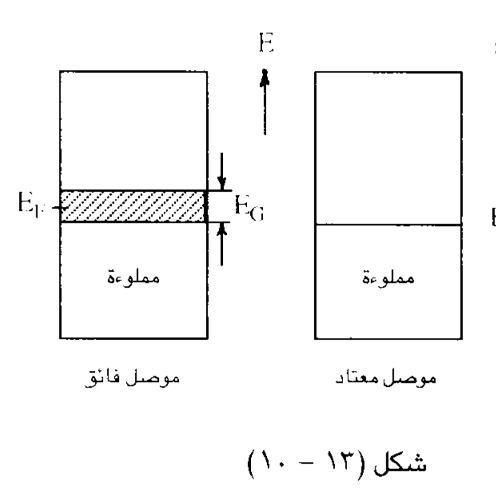
ويجب ملاحظة إنطباق قاعدة باولى Pauli exclusion principle التى تنص على عدم جواز أن يكون لإلكترونين نفس الإعداد الكمية ، وعلى ذلك يجب أن يختلف اللف لإلكترونى كوبر ، ولما كانت كميتا حركتهما متساويتين مقدارا ومتضادتين إتجاها ؛ لذلك فإن

كمية الحركة الكلية لزوج كوبر تساوى الصفر كما أن لفه أيضا مساوٍ للصفر أى أنه يعمل عمل البوزونات وليس كما فى الإلكترونات ذات اللف 1/2 ± والتى تعمل كفرميونات ، ولذلك يمكن تشبيهها فى الموصل الفائق بعملية تكثف لجميع أزواج كوبر فى الحالة الأرضية ground state ويمثلهم دالة موجية واحدة تماثلها كروى كما أنها أحادية الطور ، وتشمل كل أجزاء الموصل الفائق ، وبالنسبة للميكانيكا الموجية يمكن اعتبار الكترونى زوج كوبر على أنهما موجتان متساويتان فى السعة ويختلفان فى الطور بمقدار π ويكونان لذلك موجة موقوفة .

لا تحدث استطارة لأزواج كوبر كما هو الحال بالنسبة للإلكترونات الحرة وذلك لأنه إذا أثرت الشبيكة على الإلكترون الأول فى الزوج وغيرت من كمية حركته بقدر معين فإن الشبيكة ذاتها تغير من كمية حركة الإلكترون الثانى بنفس المقدار ولكن فى اتجاه معاكس تماما لاتجاه التغير الأول . وهذا يعنى أن التغير الكلى لكمية الحركة للزوج تساوى صفرا ، وبذلك لا يكون هناك أى تأثير للشبيكة على زوج كوبر الذى يكون له حرية الحركة تماما بداخلها فلا تكون هناك استطارة أو أى مقاومة لحركة ناقلات الشحنة ، وعلى ذلك تصير مقاومة الموصل الفائق صفرية .

طاقة الثغرة للموصل الفائق Energy gap :

يعتمد استقرار الموصل الفائق على قوة الرابطة بين الكترونى زوج كوبر . وتفسر النظريات حالة الموصل الفائق بوجود طاقة ثغرة بين الحالة الأرضية ground state والحالة المثارة للنظام كما هو مبين بالشكل (١٣ - ١٠) .



شكل (١٣ - ١٠)

وتعرف طاقة الثغرة بأنها الطاقة اللازمة لكسر الرابطه بين الكترونى كوبر ، وقد أثبتت

نظرية باردين كوبر شريفر BCS لميكانيكية التوصيل فى الموصلات الفائقة ، إن طاقة الثغرة عند $T = O\ K$ تتناسب مع درجة الحرارة الحرجة T_c حيث $E_G = 3.53\ T_c$

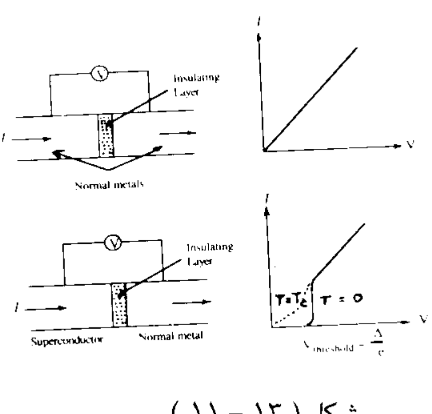
وطاقة الثغرة فى الموصل الفائق صغيرة في حدود $k\,T_c$ ($0.001\ eV$) عند الصفر المطلق ولذلك فهى لا تقارن بطاقة الثغرة في شبه الموصل ، ولذلك عند التأثير على موصل فائق بمجال مغناطيسى تزداد طاقة أحد الكترونى زوج كوبر ، بينما تنقص طاقة الثانى . فإذا كانت شدة المجال كبيرة بما فيه الكفاية ينفصل الإلكترونين وتنتهى حالة الموصليه الفائقة .

ولقياس طاقة الثغرة عمليا نجرى التجربة الآتية :

إذا أحضرنا فلزين توصليهما معتاد وجعلنا منهما وصلة كهربية بينهما طبقة رقيقة من مادة عازلة . تتبع العلاقة بين التيار والجهد على الوصلة قانون أوم كما فى الشكل (١٣-١١) بينما إذا كان أحد طرفى الوصلة من مادة موصليتهما فائقة فإننا بزيادة فرق الجهد على طرفى الوصلة لا يمر أى تيار حتى نصل إلى جهد معين threshold V_e حيث

$$V_E = E_G\ /\ 2\ e$$

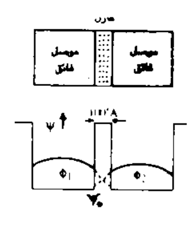
وقد استخدمنا هنا نصف طاقة الثغرة $E_G / 2$ حيث إننا بصدد الكترون واحد يخترق الطبقة العازلة بواسطة نظرية الأنفاق ، أى أنه عندما تكون الطاقة $V\ .\ e$ مساوية نصف طاقة ترابط الكترونى كوبر على الأقل ينفصل الإلكترونين ويتحول التوصيل إلى توصيل معتاد .



شكل (١٣ - ١١)

أثر جوزيفسن D C & A C Josephson Effect :

أولا : اكتشف جوزيفسن أنه عندما يتلامس موصلان فائقان بينهما طبقة رقيقه من مادة عازلة ، كأكسيد مثلا سمكه ١-٢ نانومتر ، يتولد تيار فائق I_s دون التأثير على الوصلة بأى فلطية خارجية وتزداد شدة التيار بزيادة سطح التلامس بينهما ، ولكنها تقل بزيادة سمك الطبقة العازلة ، وتفسر هذه الظاهرة بميكانيكا الكم عن طريق إختراق أزواج كوبر للطبقة العازلة بظاهرة الأنفاق المعروفة Tunnel effect . ويبين شكل (١٣ - ١٢) وصلة جوزيفسن مع اختراق حاجز الجهد بظاهرة الأنفاق ، وتكون الدالة الموجية جيبيه داخل بئر الجهد ودالة أسية داخل حاجز الجهد أى الطبقة العازلة .



شكل (١٣ - ١٢)

إذا اعتبرنا أن الدالة الموجية لزوج كوبر داخل حاجز الجهد هى :

$$\psi = \psi_0 \exp (i \phi)$$

حيث ϕ هو الطور ، وهو أحادى لجميع أزواج كوبر ، وأن طورا الموصلين الفائقين على جانبى الوصلة (ϕ_1 , ϕ_2) يكون التيار I_s المار فى الوصلة هو :

$$I_s = I_m \sin (\phi_2 - \phi_1)$$
$$= I_m \sin \delta$$

حيث I_m هو أكبر تيار حادث عندما لا تؤثر على الوصلة بأى فلطية خارجية

ثانيا : عند التأثير على الوصلة بفلطية ثابتة V (d.c. voltage) يتكون فى الحال تيار متردد I يعطى بالمعادلة

$$I = I_m \sin (\delta - 2 \pi f t)$$

حيث δ هو الطور عند الزمن $t = 0$ ، f هو تردد جوزيفسن ويعطى بالمعادلة

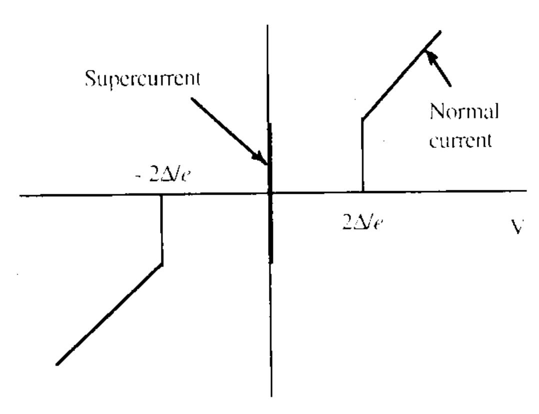
$$f = \frac{2 e V}{h}$$

حيث h ثابت بلانك ، e شحنة الإلكترون . ويبين شكل (١٣ - ١٣) منحنى تغير التيار

مع الجـهـد على وصله جـوزيفـسـن المكونة من مـادتين فـائقتى التوصـيل بنهما طبقة رقيـقة عازلة.

وقد وجد أنه بالتـأثير على الوصلة بفلطية

- واحـد مـيكرو فـولط ينشـأ تيـار تردده $f = 483.6 \ MH_Z$ ونظرا للدقـة الكبـيـرة المكنة فى قيـاس كل من التردد وفرق الجهـد لذلك



يمكن تعيين قيمة : (e/h) بدقة لم يسبق أن حصلنا عليها .

شكل (١٣ - ١٣)

وتستخدم وصلة جوزيفسن فى تطبيق هام آخر .

إذا شعنا الوصلة بإشعاع كهرمغنطيسى تردده f^1 فإننا نحصل على منحنى بين التيار والجهد يتميز بقفزات كمية كلما كان تردد جوزيفسن f مساويا مضاعفات للتردد الساقط f^1 أى كلما كان : $V = hf/2e = nhf^1/2e$

وتتصرف الوصلة كتصرف ذرة مثارة لها مستويات كمية فكلما عبر زوج كوبر الوصلة ينبعث أو يمتص فوتون تردده $f = 2eV/h$

السكويد The SQUID :

عندما تتعرض وصلة جوزيفسن لمجال مغناطيسى يتوقف شدة التيار الحرج على عدد كمات الفيض المغناطيسى المؤثر عليها فـالتيار يتغير دوريا مع الفيض ، وتستخدم هذه الظاهرة فى القياس المتناهى فى الدقة للمجالات المغناطيسية الصغيرة جدا كتلك المصاحبة للتيارات المخية فى الإنسان فى حدود 10^{-14} T .

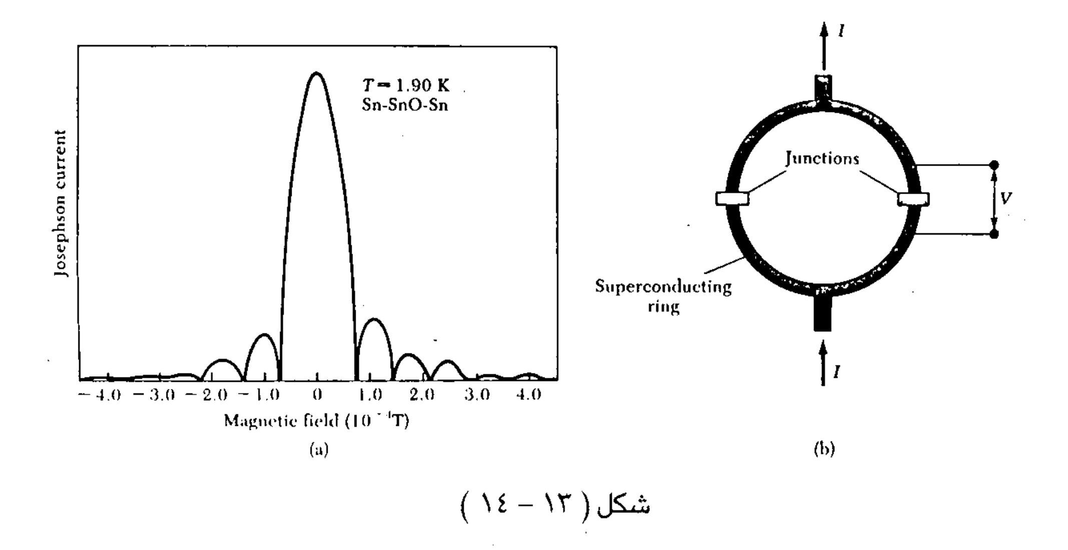
والسكويد تركيب من وصلتى جـوزيفسن يكونان حلقـه كمـا فى شكل (١٣ - ١٤)

والاسم سكويد SQUID يأتى من الاختصار الانجليزى للاسم :

Superconducting Quantum Interference Device

شدة التيار فى حلقة السكويد تساوى مجموع تيارى وصلتى جوزيفسن ، عندما تؤثر على السكويد بمجال مغناطيسى فإنه يحدث تيارا مداوما فى الحلقة يكفى لطرد الفيض المغناطيسى من الحلقة (ظاهرة ميزنر) طالما استمرت الحلقة فى موصليتها الفائقة ، أما إذا ازدادت شدة التيار عن التيار الحرج تحولت الحلقة لحظيا إلى مادة عادية التوصيل تسمح بالفيض المغناطيسى لاختراقها ، ويمكن لدائرة الكترونية تسجيل التغيرات فى شدة التيار المصاحبة للتغير فى شدة المجال .

ويكثر استخدامات السكويد حاليا لدراسة المجالات المغناطيسية الحيوية كتلك المصاحبة لتيارات القلب والمخ ، للكشف عن مصادر الصرع والسكتات القلبية عند الانسان .



شكل (١٣ - ١٤)

وحدات مرجعيه كميه للجهد والمقاومة :

Reference Quantum Standards of voltage and Resistance

أولا : أثر جوزيفسن والقياسية المرجعية للجهد :

رأينا مما سبق أن شريحتين من مادة ذات موصلية فائقة كالنيوبيوم يفصلهما طبقة رقيقة عازلة ذات سمك حوالى 1 n m تكون وصلة جوزيفسن التى تتسبب ظاهرة الأنفاق

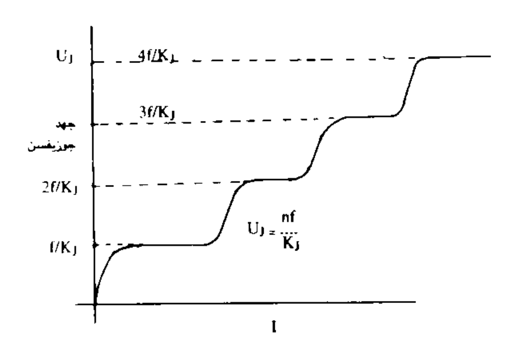
tunnel effect من أن تخترق الأمواج الإلكترونية العازل بين الشريحتين وبذلك يمر جزء كبير من تيارات التوصيل الفائق .

عند تشعيع هذه الوصلة بأمواج كهرمغناطيسية ترددها f وبقياس شدة التيار المار I وفرق الجهد على الوصلة و U_J يكون منحنى العلاقة بين التيار ، وجهد جوزيفسن كما مبين بشكل (١٣ - ١٥) حيث يظهر فيه سلميات على محور التيار تظهر عند قيم متعاقبة لجهد جوزيفسن لا تتغير مواقعها ، ويرتبط الجهد U_J الذى يحدث عنده السلمة النونيه (n th step) بتردد الأشعة الساقطة بالعلاقة :

$$U_J\ (n) = n\ f\ /\ K_J$$

حيث K_J هو ثابت جوزيفسن ، n عدد صحيح

ومن المعادلة السابقة ، وبوضع n = 1 يكون تعريف ثابت جوزيفسن هو النسبة بين التردد إلى جهد جوزيفسن عند السلمة الأولى . وقد وجد بالتجربة أن ثابت جوزيفسن K_J لا يتوقف على المتغيرات التجريبية مثل نوع الموصل الفائق أو درجة الحرارة أو تردد الإشعاع الساقط أو القدرة ، وعلى ذلك فقد اعتبر ثابت جوزيفسن كمية قياسية عالمية International quantity



شكل (١٣ - ١٥)

كما أثبتت التجربة أن القيمة المقاسة لثابت جوزيفسن تتطابق مع القيمة المحسوبة نظريا والتى تساوى ضعف شحنة الإلكترون e إلى ثابت بلانك h أى إن

$$K_J = 2\,e\,/\,h$$

وبالتعويض عن قيم h & e نجد أن قيمة هذا الثابت هى :

$K_J = 483954 \quad GH_Z/V$

وعلى ذلك فقيمة الثابت K_J يمكن استخدامها فى تعريف الوحدة القياسية للجهد أى للفلط (volt) .

ثانيا : أثر هول الكمى والقياسية المرجعية للمقاومة :

يعتبر اكتشاف فون كليتزنج لأثر هول الكمى طريقة جديدة للتعريف بالمقاومة القياسية المرجعية كما سبق بالنسبة للجهد فى وصلة جوزيفسن ، لقد عرفت مقاومة هول ρ_H بأنها النسبة بين جهد هول U_H إلى شدة التيار I المار فى العينة أى أن

$$\rho_H = U_H / I$$

وعند تثبيت شدة التيار I وتغيير شدة المجال المغناطيسى وجدت مصطبات فى المنحنى بين جهد هول U_H وشدة المجال المغناطيسى H حيث يستمر الجهد ثابتا مع زيادة شدة المجال خلال كل سلمة .

وتكون قيمة مقاومة هول عند المصطبة النونيه (n th plateau) هى :

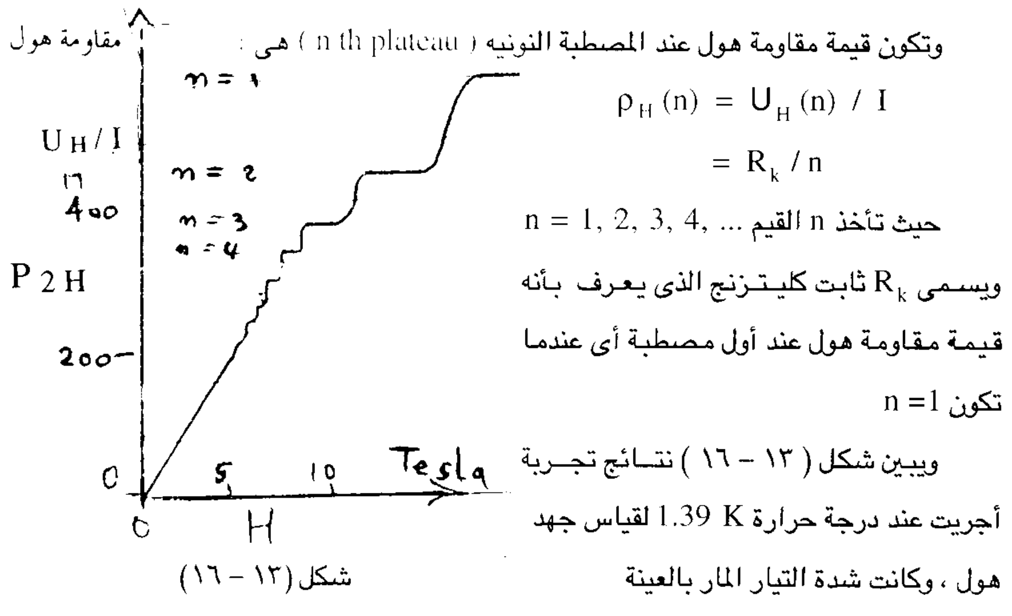
$$\rho_H(n) = U_H(n) / I$$

$$= R_k / n$$

حيث تأخذ n القيم ... ,n = 1, 2, 3, 4

ويسمى R_k ثابت كليتزنج الذى يعرف بأنه قيمة مقاومة هول عند أول مصطبة أى عندما تكون n =1

ويبين شكل (١٣ - ١٦) نتائج تجربة أجريت عند درجة حرارة 1.39 K لقياس جهد هول ، وكانت شدة التيار المار بالعينة 25.52 μ A ووجد أن مقاومة هول تظهر المصطبات المبينة بالشكل عند قيم مكماة



شكل (١٣ - ١٦)

R_H / n حيث $n = 1, 2, 3, ...$

وأن قيمة ثابت كليتزنج للسلمة $n = 1$ هو :

$$R_H = 25813 \text{ ohm}$$

وأن هذه القيمة تتطابق مع النتائج النظرية لأثر هول الكمى ، وهى :

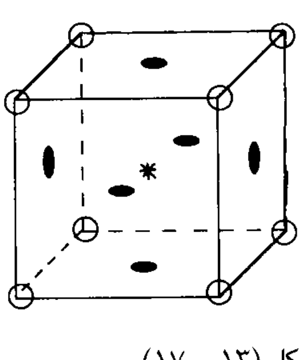
$$R_H = h / e^2$$

حيث h ثابت بلانك ، e الشحنة الإلكترونية .

ومما سبق نرى أن أثر جوزيفسن ، وأثر هول الكمى أوجدا قياسية كمية Quantum standards للجهد وللمقاومة على الترتيب ، وعلى ذلك أمكن تحديد قيمة الوحدة لكل من الجهد والمقاومة أى الفلط والأوم على أساس قيم الثابتين الكميين R_K ، K_J وهما ثابت جوزيفسن وثابت كليتزنج للفولط والمقاومة .

الموصلية الفائقة عند درجات الحرارة المرتفعة
High Temperature Superconductivity

حتى عام ١٩٨٦م ، كانت أعلى درجة حرارة أمكن عندها الحصول على الموصلية الفائقة فى بعض المواد هى $T_c = 23.2$ K . وكانت المادة هى نيوبيوم جرمانيوم $(Nb_3 Ge)$. وكانت معظم البحوث متجهة إلى دراسة الأكاسيد ذات التركيب بيروفسكايت Perovskite الذى يمثله تركيب تيتنات الباريوم المبين بشكل (١٣ - ١٧) ومن أمثلة تلك المواد تيتنات السترنشيوم وتنجستات الصوديوم .

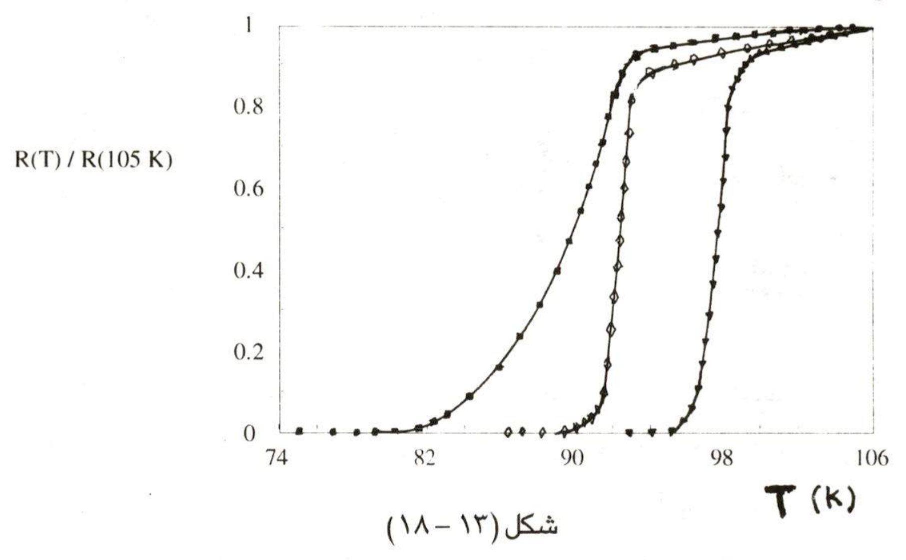


شكل (١٣ - ١٧)

وبنهاية عام ١٩٨٦م اكتشف بدنورز ومولر Bednorz & M`üller مادة سيراميكية (LaBCO) أظهرت موصلية فائقة ابتداء من الدرجة ٣٥ كلفن وقد أمكن بعد ذلك بالتأثير على المادة بضغوط كبيرة رفع درجتها الحرجة إلى $T_c = 57$ K . وقد أثبت ذلك أن إنقاص البعد الشبيكى والمسافة بين الذرات يؤدى إلى

رفع الدرجة الحرجة للموصل الفائق ، وقد دفع ذلك العلمـــاء إلى استبـــدال ذرة اللانتانـام (La) بذرة أصغر حجما منها وإن كانت تماثلها كيميائيا هى ذرة الايتريوم (Y) وعندئذ تكون المركب (Y B CO) الذى أظهر نقصا حادا فى المقاومة الكهربية عند درجة 93 K انتهت بمقاومة صفرية تماما عند درجة 80 k كما مبين بشكل (١٣ – ١٨) .

وقد أثبتت القياسات المغناطيسية على هذا المركب ظهور أثر ميزنر عند درجات أقل من 90 K .



شكل (١٣ – ١٨)

البنية التركيبية للموصلات الفائقة عند الدرجات المرتفعة :

أظهرت الدراسة بالأشعة السينية أن الموصل الفائق Y B C O يتركب من طبقات ثلاث لكل منها تركيب بيروفسكيت :

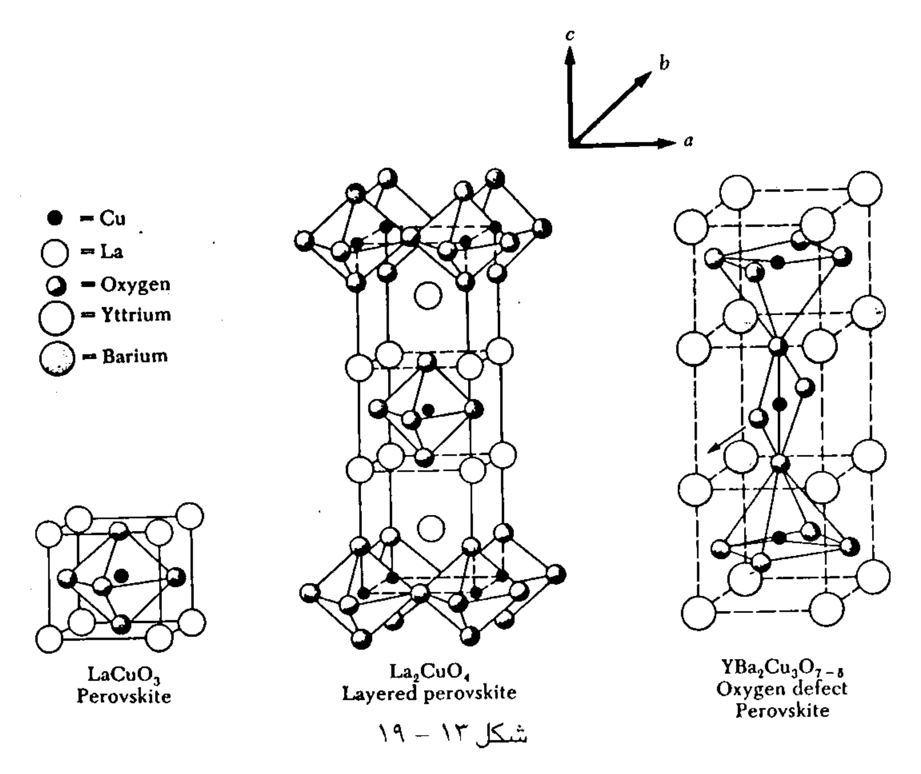
١ – طبقة من أكسيد النحاس Cu - O

٢ – طبقة من أكسيد الباريوم Ba - O

٣ – طبقة من ذرات الايتريوم Y

ويكون ترتيب هذه الطبقات كما مبين بشكل (١٣ – ١٩) كالآتى :

$Cu\,O_{1-\delta}$: $Ba\,O$: $Cu\,O_2$: Y : $Cu\,O_2$: $Ba\,O$



شكل ١٣ - ١٩

يختلف تركيب البنية للمركب وفقا للكمية δ التى تحدد عدد ذرات الأكسجين :

١ - إذا كانت $\delta \leq 0.5$ كانت البنية متماثلة من نوع orthorhombic

٢ - وإذا كانت $\delta \geq 0.5$ يكون للبنية تماثلا من نوع tetragonal

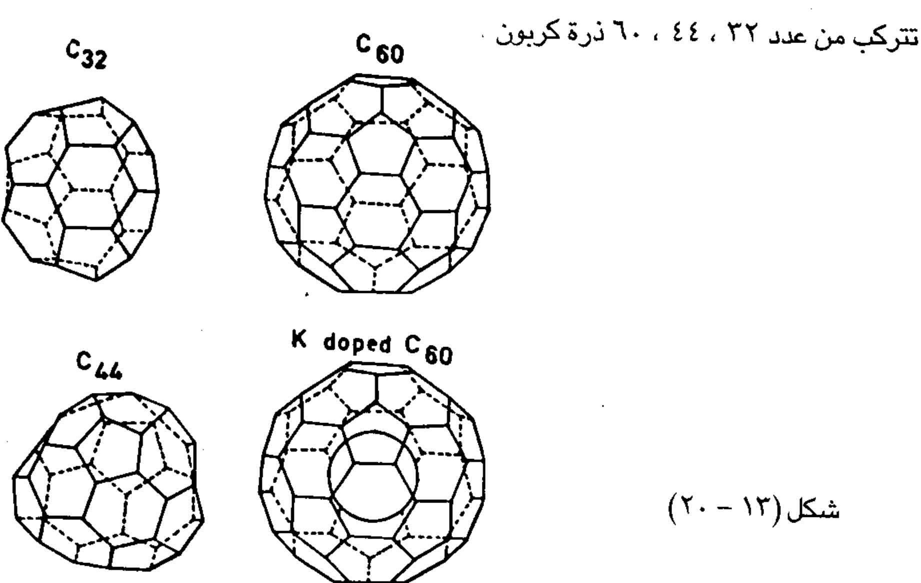
فى التركيب الأول ($\delta \leq 0.5$) تكون ذرات النحاس والأوكسجين سلاسل خطية فى اتجاه y كما فى الشكل وقد تثبت عمليا أن التوصيل الفائق يتم فى هذا التركيب orthorhombic من خلال طبقات أوكسيد النحاس $Cu\,O_{1-\delta}$ وفى اتجاه سلاسل Cu O فى هذه الطبقات .

أما عن ميكانيكية التوصيل الفائق فى مثل هذه المواد فقد أظهرت الحسابات النظرية للبنية النطاقية Band Structure على هذه الأكاسيد أنه من الصعب جدا تفسير ميكانيكية التوصيل الفائق على أساس نظرية الفعل البينى للإلكترونات مع فونونات الشبيكة B C S Theory وعلى أساس تكون أزواج كوبر .

وهناك نظريات شتى وافكار غير تقليدية لتفسير هذه الميكانيكية منها تأثير المستقطبات الثنائية bipolarons وتذبذبات اللف الإلكترونى spin fluctuations ورنين روابط التكافؤ resonating valence bonds . ولا يزال البحث جاريا .

الفولرين موصل فائق جديد Fullerine - C_{60} :

يعتبر اكتشاف الفولرين C_{60} من أهم اكتشافات الكيمياء الفيزيائية لعام ١٩٨٥م . فقد وجد مجموعة من العلماء أنه بتبخير الجرافيت بشعاع ليزر فى وجود غاز الهليوم يتكون جزىء عملاق من ذرات الكربون له بنيه كرويه مغلقه مجوفة من الداخل ، وقد سمى الجزىء بالفولرين تكريما لاسم فولر الذى وضع التصميم الهندسى لهذا الجزىء ، فلكى يتكون الجزىء يجب أن يتوفر إثنا عشر حلقه خماسية pentagons تتصل بعدد من الحلقات السداسية hexagons يتحدد بعددها شكل وحجم الجزىء . وأكثر هذه الجزيئات ثباتا واستقرار هو C_{60} الذي يتكون هيكله من ١٢ حلقه خماسية تتصل بعدد ٢٠ حلقه سداسيه لتكوين هيكل كرى تمام مثل كرة القدم . يوجد عند كل نقطة التقاء لهذه الحلقات ذرة من ذرات الكربون . وشكل (١٣ - ٢٠) يبين أشكال مختلفة من جزيئات الفولرين التي تتركب من عدد ٣٢ ، ٤٤ ، ٦٠ ذرة كربون .

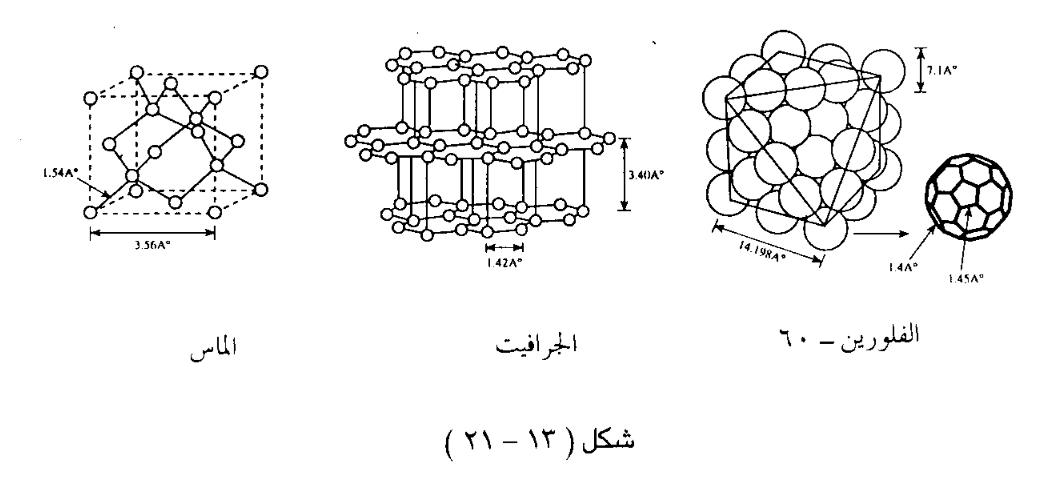


شكل (١٣ - ٢٠)

قوى الترابط فى الفولرين :

من المعترف به حاليا أن الفولرين هو الطور الثالث للكربون بعد الجرافيت والماس ، وبنية الفولرين تربط بين مستويات الجرافيت وتساهميه الماس . فقوى الترابط بين ذرات كربون الفولرين تساهمية بين ثلاثة ذرات فقط ، بينما الإلكترون الرابع يكون حرا لعمل رابطة π (π orbital) مع جزيئات فولرين مجاورة فى الشبيكة التى ثبت أنها تكعيبية متمركزة الوجه f . c. c. ، حيث تكون القوى بين جزيئات الفولرين التى تشغل نقاط الشبيكة هى قوى فإن درفال .

ويبين شكل (١٣ – ٢١) مقارنة بين أطوار الكربون المختلفة :



شكل (١٣ – ٢١)

خواص الفولرين وموصليته الفائقة :

بعد أن اكتشفت طريقة سهلة لتحضير الفولرين عكف العديد من العلماء فى شتى أنحاء العالم على دراسة خواصه ، وقد كانت طريقة تحضيره تعتمد على إشعال قوس كهربائى فى جو من الهليوم ، وجمع المادة المتجمعة وإذابتها فى البنزين أو التولوين . فلا يتبقى دون ذوبان إلا الفولرين ، وبذلك يتم فصله عن الشوائب الأخرى .

وبدراسة خواص الفولرين وجد أن معامل أنضغاطه الطولى صغير جدا بينما معامل

إنضغاطه الحجمى كبير جدا نظرا لتجوف الجزىء . ولذلك فيعتبر الفولرين أفضل من الجرافيت من حيث قدرته التشحيمية – لأجزاء الالات المتحركة خاصة إذا كانت الحركة مع درجة حرارة مرتفعة .

ومن أهم صفات الفولرين قابليته للتفاعل مع الذرات المعطاءة لإلكتروناتها مثل : الهاليدات القلوية ، مثل الليثيوم والصوديوم والبوتاسيوم والروبيديوم والسيزيوم . وتعطى ذرات هذه المواد ألكتروناتها الخارجية (s - electrons) للفولرين مما يملأ جزئيا نطاق التوصيل ، وبذلك يتحول الفولرين إلى موصل جيد للكهرباء .

وقد ظهر للبوتاسيوم فولرين $K_X C_{60}$ خواص موصلية فائقة درجتها الحرجة $T_c = 18$ k ، وبالتجربة أمكن رفع الدرجة الحرجة لتصبح $T_c = 28$ k فى حالة $Rb_x C_{60}$ فولريد الروبيديوم . وباستخدام الاشعة السينية وجد أن الطور الموصل الفائق ينشأ عند اتحاد ثلاث ذرات من الهاليدات القلوية مع الفولرين ، مثلا : $K_3 C_{60}$ ، أما إذا اتحد ستة ذرات مع جزىء الفولرين $K_6 C_{60}$ ينتج طور عازل كهربيا ، وكلما إزداد البعد الشبيكى فى بلورة الفولرين التكعيبيه كلما ازدادت الدرجة الحرجة T_c للموصل الفائق .

ويتوقع العلماء للفولرين مستقبلا تكنولوجيا عظيما عن جميع الأنواع الأخرى من الموصلات الفائقة .

مسائل وتمارين علي الباب الثالث عشر

١ - سلك من الرصاص نصف قطره 3 m m فى درجة حرارة 4.20 K أوجد :

أ - المجال المغناطيسى الحرج عند هذه الدرجة .

ب - أكبر تيار يمكن للسلك أن يمرره عند هذه الدرجة .

٢ - ملف لولبى عدد لفاته 150 لفه لكل سم[٢] يتكون سلكه من مادة ذات موصليه فائقة من النوع الأول مجالها الحرج $H_c = 32$ T عند الصفر المطلق ودرجة حرارتها الحرجة $T_c = 18$ K أوجد :

أ - شدة التيار المداوم الذى يحدث مجالا مغناطيسيا 5 T داخل الملف .

ب - أكبر تيار يمكن إمراره فى الملف إذا حفظت درجة حرارته عند 15 K

$\left(\mu_0 = 2\,\pi \times 10^{-7} \quad N / A^2\right)$

٣ - أثبت بالإستعانة بقاعدة أمبير أن تيارات التوصيل تكون دائما تيارات سطحية لا تخترق قلب الموصل .

٤ - أوجد طاقة الثغرة للرصاص فائق التوصيل إذا كانت درجته الحرجة $T_c = 7.193$ K ثم أوجد أقل طاقة فوتونية يمكن أن تمتص بالرصاص عند الصفر المطلق؟

٥ - أوجد شدة التيار المداوم الذى يتكون فى حلقة من النيوبيوم الموصل الفائق قطرها 2 cm إذا وضعت عموديه على مجال مغناطيسى شدته 0.02 T ، ثم أزيل المجال فجأة علما بأن الحث الذاتى للحلقة $L = 3.1 \times 10^{-8}$ H ؟

٦ – أوجد طاقة الثغرة للموصل الفائق عالى الدرجة $Y\,Ba_2\,Cu_3\,O_{7-\delta}$ إذا كانت درجته الحرجة $T_c = 92\ K$ بفرض صحة نظرية B C S .

٧ – سكويد نصف قطره 2 mm يمكنه قياس فيض مغناطيسى $10^{-4}\ \phi_0$ ما هو أقل تغير فى مجال مغناطيسى يمكن أن يسجله ؟

٨ – تتغير الأنتروبيا لوحدة الحجوم من الحالة المعتادة للتوصيل إلى حالة الموصلية الفائقة وفقا للمعادلة :

$$\frac{\Delta S}{V} = -\frac{\delta}{\delta T}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)$$

حيث $\frac{B^2}{2\mu_0}$ هى الطاقة المغناطيسية لوحدة الحجوم اللازمة لإزالة الموصلية الفائقة .

أوجد مقدار التغير فى الأنتروبيا فى حالة 1 mol من الرصاص عند درجة 4 K إذا كان المجال المغناطيسى الحرج والدرجة الحرجة $B_C(0) = 0.08\ T\ ;\ T_C = 7.2\ K$

٩ – عند درجة حرارة أقل من الدرجة الحرجة لموصل فائق تكون طاقة ترابط الكترونى كوبر 0.1 m eV أقل من طاقة الإلكترونين عندما لا يكونا مترابطين ، أى أن هناك ثغرة بين مستوى طاقة زوج كوبر والمستوى الإلكترونى فى نطاق الكترونى .

ارسم مستويات الطاقة فى النطاق الإلكترونى لزوج كوبر مع توضيح على الشكل مستوى طاقة التهيج الحرارى k T عند درجة 1 K . واشرح لماذا يكون زوج كوبر مستقرا عند درجة 1 K .

١٠ – أسطوانة مجوفة من مادة ذات موصلية فائقة القطر الداخلى لها 25 μ m .
يوجد مجال مغناطيسى فى المنطقة المفرغه من الاسطوانة فى اتجاه المحور ، أوجد شدة

هذا المجال إذا مر بالمنطقة المجوفة بالأسطوانة كمة واحدة من الفيض المغنطيسى .

١١ – ملف من مادة موصلة فائقة عدد لغاته 3000 لغة لكل متر يمر به تيار فائق شدته 12 A . للملف قلب مفرغ نصف قطره 7.5 mm .

أ – أوجد شدة المجال المغنطيسى داخل الملف ؟

ب – أوجد مقدار الفيض المغنطيسى المار فى قلب الملف المفرغ ؟

جـ – أوجد عدد الكمات من الفيض التى تمر بالقلب المفرغ ؟

د – ماذا يكون التغير فى الفيض المغنطيسى إذا زاد عدد الكمات للفيض بمقدار كمة واحدة؟

١٢ – سلك من موصل فائق من النوع الثانى نصف قطره R يحمل تيارا موزع بانتظام على مساحة مقطعة إذا كان التيار الكلى المار بالسلك هو I أثبت أن الطاقة المغنطيسية لوحدة الطول من السلك داخلة هى $\left(\mu_0 \ I^2 \ / \ 16\pi\right)$ ؟ .

الباب الرابع عشر
الخواص المغناطيسية للجوامد

ترتبط الخواص المغناطيسية للمواد بالحركة المدارية والمغزلية للإلكترونات فى ذراتها .
وتقاس عادة هذه الخاصة المغناطيسية بالقابلية المغناطيسية magnetic susceptibility لوحدة الحجوم من المادة X وتعريفها هو :

$X = M / H$

حيث M هو العزم المغناطيسى لوحدة الحجوم << magnetization >> و H هو الشدة المغناطيسية .

المواد أنواع :

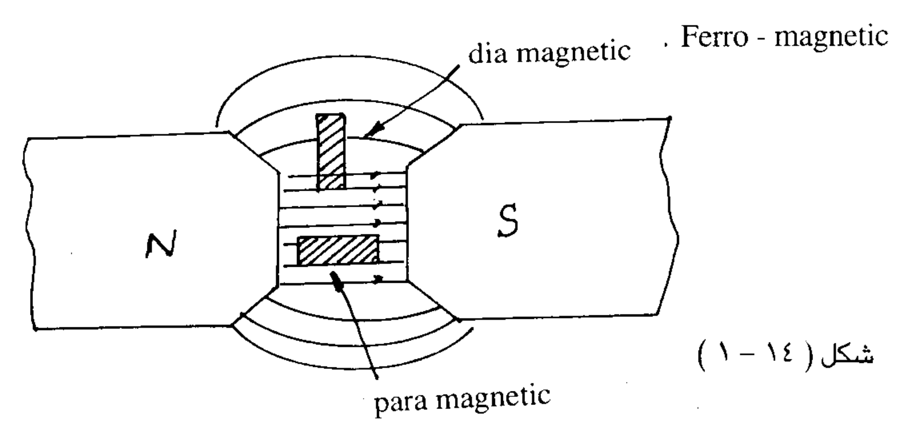
(أ) مواد ديا مغناطيسية : Dia magnetic

ويكون لها قابلية مغناطيسية سالبة ، أى أنها تتنافر مع الأجزاء القوية من المجال المغناطيسى إذا وضعت فيه ، شكل (١٤ - ١) .

(ب) مواد بارا مغناطيسية : Para magnetic

وهى التى تنجذب للمناطق القوية فى المجال المغناطيسى .وقابليتها موجبة .

وإذا كانت القابلية المغناطيسية لهذه المواد كبيرة جدا سميت بالمواد الفيرو مغناطيسية Ferro - magnetic .



شكل (١٤ - ١)

إذا وضعنا مادة ما فى مجال مغناطيسى فإنها تنجذب أو تتنافر معه بقوة تتناسب مع شدة المجال ، وكذلك مع معدل تغير المجال مع المسافة $\frac{dH}{dx}$. أى أن .

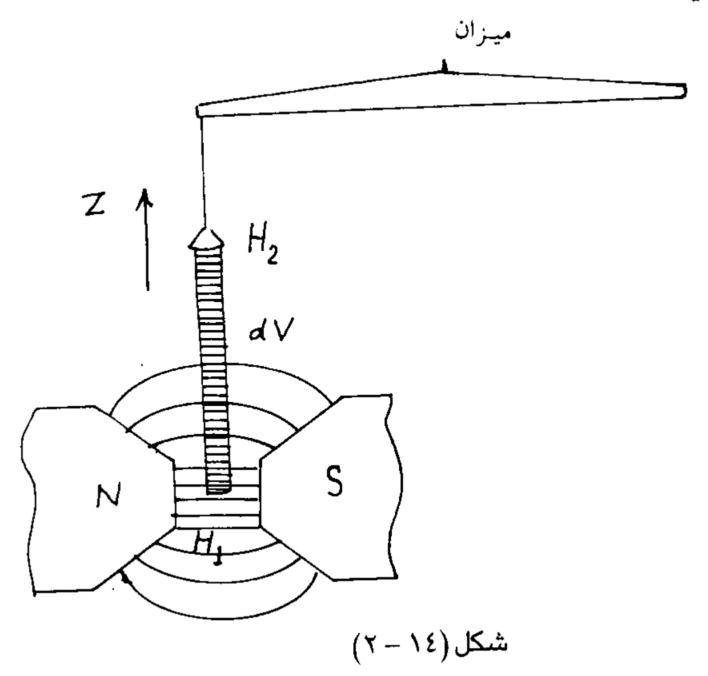
$$F = \chi . V . H . \frac{dH}{dx}$$

حيث V هو حجم المادة وتعطى القابلية المغناطيسية χ مقياسا للتغير فى العزم المغناطيسى للذرات بعد التأثير بالمجال H

قياس القابلية المغناطيسية :

طريقة جوى Gouy method

توضع المادة على شكل أسطوانة رفيعة بين طرفى مغنطيس قوى يكون المجال فيه غير منتظم . وتقاسي القوة المؤثرة على المادة (سواء كانت جاذبة



شكل (١٤ - ٢)

كما فى حالات المواد البارا مغنطيسية أو نافرة كما فى حالات المواد الديا مغنطيسية) بواسطة ميزان حساس ، شكل (١٤ -٢)

القوة فى الاتجاه الرأسى والمؤثرة على حجم صغير dV هى

$$dF_z = \chi H \frac{dH}{dz} . dV$$

$$= 1/2 \chi \frac{dH^2}{dz} dx\, dy\, dz$$

$$\therefore dF_z = 1/2 \chi \frac{dH^2}{dz} dx\, dy\, dz$$

وتكون القوة الكلية المؤثرة على الجسم هى :

$$F_z = 1/2 \chi \int_1^2 \frac{d}{dz} H^2 dx\, dy\, dz$$

$$= 1/2 \chi A (H_1^2 - H_2^2)$$

حيث A هو مساحة مقطع المادة $(dx\ dy)$ و H_1 ، H_2 هما شدتى المجال عند طرفى المادة . ولما كانت H_1 أكبر جدا من H_2 ، وذلك فى حالة مادة أسطوانية طويلة طرفها العلوى بعيد عن قطبى المغناطيسى ، ولما كانت قيمة المجال مربعة فى القانون لذلك يمكن إهمال H_2^2 بالنسبة إلى H_1^2 ، وتصبح القوة على المادة .

$$F_z = 1/2 \chi A H^2$$

حيث H هى شدة المجال بين قطبى المغناطيس ، ويمكن قياسها عمليا بواسطة فلكسمتر وملف باحث .

وقد وجد أن القابلية المغناطيسية لمعظم المواد ، سواء البارا أو الديا مغناطيسية صغيره ، وتترواح قيمتها بين 10^7 & 10^6

نظرية لانجفين للديا مغناطيسية : Langevin Diamagnetism equation .

يؤثر أى مجال مغناطيسى على حركة إلكترونات الذرة فيعطيها حركة رحوية pressional إضافية لها تردد زاوى angular frequency

$$\omega_L = \frac{eH}{2mc}$$

وتعادل الحركة الرحوية للتوزيع الألكترونى
The precession of the electron distribution

تيارا ديامغنطيسيا I يعطى بالمعادلة :

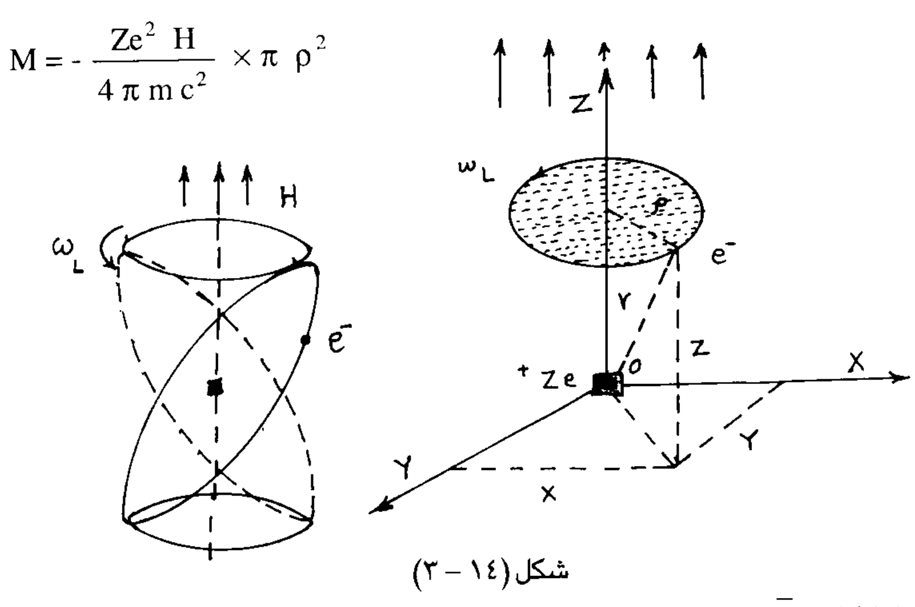
$$.I = -\frac{Ze}{c.T.} = -\frac{Ze\,\omega_L}{2\pi C} \qquad e.m.u$$

$$\therefore\ I = -\frac{Ze}{2\pi c}\cdot\frac{eH}{2mc} \qquad e.m.u.$$

العزم المغناطيسى M هو حاصل ضرب التيار فى مساحة المسار ، شكل (١٤ – ٣)

فإذا كان ρ هو متوسط نصف قطر الحركة الرحوية للإلكترون حول المجال المغناطيسى يكون

$$M = -\frac{Ze^2\ H}{4\pi m c^2} \times \pi\ \rho^2$$



شكل (١٤ – ٣)

إذا كانت $\overline{r}$ هى متوسط نصف قطر مسار الإلكترونات ، وباعتبار توزيع كروى للشحنة حول النواة ، يكون

$$x^2 = y^2 = z^2$$

ويكون

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = 3/2\,\rho^2$$

ويصبح العزم المغناطيسى للذرة الواحدة هو :

$$M = -\frac{Ze^2}{6mc^2}\ H\ \overline{r^2}$$

فإذا كان هناك عدد N ذرات فى وحدة الحجوم من المادة تكون القابلية المغناطيسية لوحدة

الحجوم هى :

$$\chi = \frac{M}{H} = - \frac{Z e^2}{6 m c^2} N \overline{r^2}$$

ويمكن تعيين قيمة $\overline{r^2}$ إذا عرف توزيع الشحنات حول النواة ، ويتم حساب ذلك باستخدام ميكانيكا الكم . والحل الوحيد الكامل لهذه المشكلة هو لذرة الأيدروجين . ولكن توجد حلول تقريبية للأنواع الأخرى من الذرات ، تعطى قيما للقابلية المغنطيسية χ بحيث تتفق النظرية مع التجربة .

النظرية الكمية للبارا مغنطيسية : Quantum theory of paramagnetism

تكون الذرة بارا مغنطيسية إذا كان لها محصلة عزم مغنطيسى ناشئ عن تحصيل العزم المغناطيسى المدارى والمغزلى .

جميع الذرات التى تحتوى عددا فرديا من الإلكترونات تكون بارا مغنطيسية ، حيث إن العزم المغنطيسى المغزلى لا يمكن أن يكون صفرا .

عند التأثير بمجال مغناطيسى خارجى فإن العزوم المغنطيسية المغزلية تترتب ؛ إما موازية أو عكس موازية لاتجاه المجال المغنطيسى تبعا (parallel or anti - parallel) لاتجاه الحركة المغزلية للإلكترون .

تتوقف الخواص البارا مغنطيسية للبلورات على ترتيب الحركة التعاونية للعزوم المغنطيسية الإلكترونية فى اتجاه أو فى عكس اتجاه المجال .

عند تطبيق أحصاء فيرمى وديراك على الغاز الإلكترونى فى الفلز ؛ نجد أن توزيع الإلكترونات عند درجة الصفر المطلق يكون على شكل دالة قطع مكافئ ، وتمثل العلاقة بين كثافة مستويات الطاقة $N(E)$ بدلالة الطاقة E

عند الصفر المطلق ، وفى غياب أى مجال مغناطيسى تكون جميع المستويات الأقل من طاقة فيرمى E_F مشغولة بإلكترونين لكل مستوى يكون مغزلاهما متعاكسين $S = \pm 1/2$.

أى أن الإلكترونات تشكل مجموعتين تبعا للحركة المغزلية . وعند التأثير بمجال مغناطيسى نجد أن الإلكترونات ذات المغزل الموجب مثلا تترتب فى اتجاه المجال بينما تترتب عكس ذلك الألكترونات الأخرى .

إذا كان بوهر ماجنتون هو B وشدة المجال H نجد أن طاقة كل الكترون مغزلة موجب تزداد بمقدار BH + بينما تنقص طاقة الألكترون نو المغزل السالب بمقدار BH - وهذا الوضع غير مستقر . وتتساوى فى الحال مستويات الطاقة العليا تحت تأثير التهييج الحرارى .

فمثلا : إذا كان $H = 10^5$ Oe يكون المقدار $BH = 10^{-3}$ eV ولهذا السبب فإن kT تكون أكبر كثيراً فى المعتاد من BH ولهذا السبب نجد أن القابلية المغناطيسية لبعض الفلزات لا تتأثر بدرجة الحرارة وهو خلاف ما ينص عليه قانون كورى الذى يعطى تغيرا عكسيا لـ X مع T

وقد أوجد باولى قيمة القابلية البارا مغنطيسيه التى لا تتأثر بدرجة الحرارة

أولا : تغير القابلية المغناطيسية مع درجة الحرارة (قانون كورى) :

اعتبر البارا مغناطيسية الناشئة عن الحركة المغزلية للألكترونات

$m_s = \pm 1/2$

عند التأثير بمجال مغناطيسى H تنفلق مستويات الطاقة بمقدار .

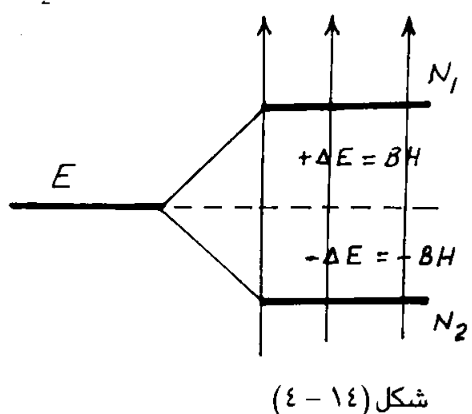
$\Delta E = g B H m_s$

كما مبين بشكل (١٣ – ٤) حيث g هو ثابت الانشطار للاندى Land splitting factor ، m_s هو العدد الكمى المغناطيسى المغزلى .

نفرض أن هناك مستوى واحد فقط انفلق الى مستويين فى وجود المجال المغناطيسى شكل (١٤ – ٤) وأن تعداد الألكترونات ذات المغزل الموجب على المستوى الأول هو N_1 بينما تعداد الألكترونات ذات المغزل السالب على المستوى الآخر هو N_2 . إذا كان N هو

العدد الكلى للذرات لوحدة الحجوم يكون

$$N = N_1 + N_2$$



شكل (١٤ - ٤)

باستخدام إحصاء ماكسويل وبولتزمان يكون تعداد الألكترونات على المستوى الأول عند الاتزان الديناميكى الحرارى عند الدرجة T^0K هو

$$N_1 = e^{\Delta E/kT}$$

وتعداد الألكترونات على المستوى الثنائى

$$N_2 = e^{-\Delta E/kT}$$

بقسمة المعادلتين :

$$\therefore \frac{N_1}{N} = \frac{e^{\Delta E/kT}}{e^{\Delta E/kT} + e^{-\Delta E/kT}}$$

أيضا

$$\frac{N_2}{N} = \frac{e^{-\Delta E/kT}}{e^{\Delta E/kT} + e^{-\Delta E/kT}}$$

ويكون بذلك مقدار المغناطيسية الناشئة عن N ذرات فى وحدة الحجوم هو :

$$M = g\,B\,m_s\,(N_1 - N_2)$$

$$= g\,B\,N\,m_s\,\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = m_s\;BN\,g\tanh x$$

حيث

$$\frac{\Delta E}{kT} = x = g\, B m_s\, H / kT$$

عندما تكون $x << 1$ $\tanh x = x$

$$\therefore\ M = m_s\, B\, N\, g \cdot \frac{g\, B m_s H}{kT} = \frac{N g^2 m_s^2 B^2 H}{kT}$$

وبوضع معامل الانشطار للاندى للالكترونات $g = 2$ و $m_s = 1/2$ نحصل على القابلية المغنطيسية X

$$X \frac{M}{H} - = \frac{NB^2}{KT}$$

أى أن X تتناسب عكسيا مع درجة الحرارة المطلقة T

ثانيا : القابلية المغنطيسية لباولى :

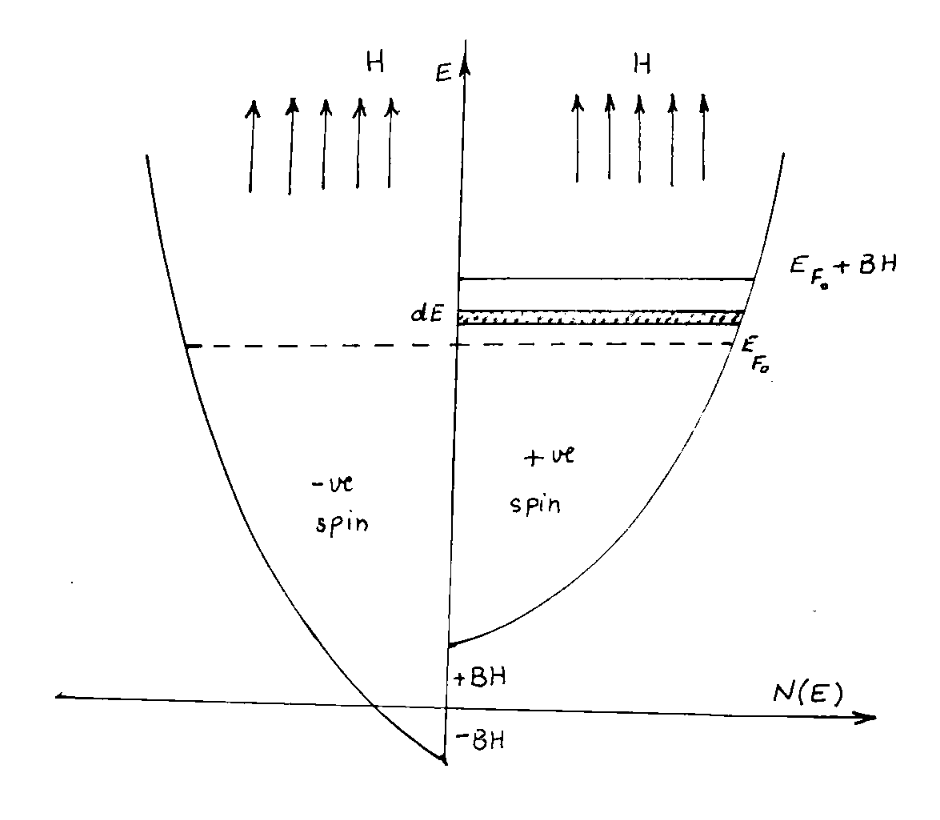
ينص قانون كورى على أن القابلية المغنطيسية X تتناسب عكسياً مع درجة الحرارة المطلقة T ، وبالرغم من أن القانون قد أثبت صحته بالنسبه لمواد كثيرة إلا أنه فشل بالنسة لبعض الفلزات التى أثبتت التجربة أن قابليتها المغنطيسية لا تتأثر بدرجة الحراره وفقا لما يمليه قانون كورى وقد فسر باولى ذلك الشذوذ بأن الغاز الإلكترونى فى الغازات يخضع لأحصاء فيرمى وديراك وليس لإحصاء ماكسويل وبولتزمان .

اعتبر التوزيع الإلكترونى فى الفلز عند درجة الصفر المطلق ويمثله قطع مكافئ كما مبين بشكل (١٤ – ٥) .

. إذا أثرنا على الفلز بمجال مغنطيسى H تزداد أو تقل طاقة كل الكترون وفقا لاتجاه لفة بالنسبه لاتجاه المجال المغنطيسى . أى أن نصف عدد الإلكترونات الموجبة اللف (مثلا) تزداد طاقة الموضع لها بينما تنقص الطاقة المغنطيسية للنصف الآخر ذو اللف السالب بنفس المقدار .

التغير فى طاقة الألكترون ΔE فى مجال مغنطيسى H هو :

$$\Delta E = g\, m_s\, BH$$



شكل (١٤ – ٥)

حيث g هو ثابت الانشطار للاندى للألكترون الحر ، ويساوى 2

m_s هو عدد اللف الكمى ويساوى $\pm \frac{1}{2}$

B هو ماجنتون بوهر .

أى أن التغير فى الطاقة الإلكترونية هو $\Delta E = \pm B H$

إذا كان E_{Fo} هو مستوى فيرمى للطاقة عند درجة الصفر المطلق نجد عند التأثير بمجال مغنطيسى H حدوث اختلاف بين مستويى الطاقة الإلكترونية بالنسبه لإكترونات اللف السالب واللف الموجب ، ويتبع ذلك اختلاف عدد الإلكترونات على كل مستو . فهى أكثر عدداً فى مستوى الطاقة المرتفع عنها في المستوى المنخفض . وهذه الزيادة تعطى للمادة مزيداً من العزم المغنطيسى فى اتجاه المجال المؤثر .

نفرض أن Δn هو عدد الألكترونات التى غيرت اتجاه لفها

$$\therefore \quad \Delta n = \int_{E_{F_o}}^{E_{F_o}+BH} \frac{1}{2} N(E)\, dE$$

$$= \frac{1}{2} N\left(E_{F_o}\right) \; B\,.H$$

التغير فى العزم المغناطيسى نتيجة لإعادة ترتيب لف الإلكترونات هو :

$$\Delta M = \Delta n \,.\, 2B$$

والمعامل ٢ هنا بسبب أن اللف يدور بزاوية ١٨٠° أى أنه يتحول من (B -) إلى (B +)

أى أن التغير 2B

$$\therefore \Delta M = \frac{1}{2} N(E)\, B.H \times 2B$$

$$\therefore \quad \Delta M = B^2 \quad H \quad N(E)$$

وتكون الزيادة فى العزم المغنطيسى لوحدة الحجوم من البلورة فى اتجاه المجال المغناطيسى هى :

$$\frac{\Delta M}{V} = \frac{B^2 H}{V} N(E)$$

وتضيف الزيادة فى العزم الى القابلية البارا مغنطيسية للمادة

$$X\,(\text{Pauli}) = \frac{M}{H} = \frac{B^2}{V} N(E)$$

وبوضع قيمة دالة التوزيع $N(E)$ حيث :

$$N(E) = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} E^{1/2} = \frac{3}{2} \left(N/E_F\right)$$

وبمعرفة N بدلالة طاقة فيرمى E_F حيث :

$$N = \frac{2}{3} \; 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} E_{F_o}^{3/2}$$

تكون قيمة القابلية المغنطيسية لباولى لوحدة الحجوم هى :

$$\chi \text{ (Pauli)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{E_{F_o}} \cdot B^2$$

من ذلك يتضح أنه لا تأثير لدرجة الحرارة على القابلية المغناطيسية إلا من خلال تغير طاقة فيرمى E_{F_o} مع درجة الحرارة .

الرنين الألكترونى البارا مغناطيسى :

Electron paramagnetic resonance   E S R

عند وضع بلورة بارا مغناطيسية فى مجال مغناطيسى H فى اتجاه Z تنفلق مستويات الطاقة الالكترونية تبعا لتأثير زيمان .

التغير فى طاقة الألكترون ΔE هو :

$$\Delta E = g\, BH\, m_s$$

الفرق بين مستوى الطاقة الذين استحدث بواسطة التأثير بالمجال المغناطيسى هو :

$$\Delta E = 2\, g\, BHm_s$$

حيث B هو ماجنتون بوهر ، معامل الانشطار للاندى بالنسبة للألكترونات يساوى ٢، $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

أى أن $\Delta E = 2\, B\, H$

عندما تؤثر على المادة بمجال كهربى متردد تردده υ يمكن حدوث انتقال للألكترونات من المستوى الأولى للثانى وبالعكس .

الطاقة التى يمتصها الألكترون للانتقال للمستوى الأعلى هى :

$$E = h\upsilon = 2\, B\, H$$

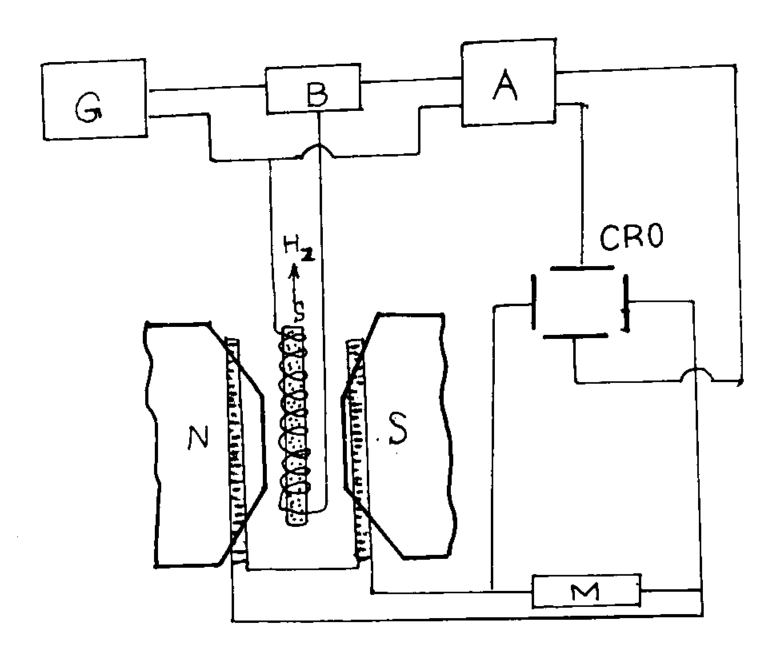
عندما يتساوى $h\,\upsilon$ بالمقدار $2\,BH$ يحدث رنين ألكترونى مغزلى لأن انتقال الألكترون من المستوى الأقل طاقة للأعلى يتحتم معه أن يغير الألكترون من اتجاه حركته المغزلية وبالمثل عندما يعود للمستوى الأصلى .

ولذلك تسمى هذه العملية : E S R electron spin resonance الرنين الألكترونى

المغزلى .

ويوجد عادة طريقتين لإحداث الرنين الأولى : هى بتغيير شدة المجال المغناطيسى H مع تثبيت التردد للمجال الكهربائى ، والأخرى : بالعكس نثبت المجال H ونغير التردد للمجال الكهربائى .

عند حدوث الرنين تمتص طاقة الرنين من دائرة المجال الكهربائى . ويؤخذ لذلك التردد يحدث عنده أكبر امتصاص للطاقة على أنه تردد الرنين ، شكل (١٤- ٦)



طريقة الرنين الإلكترونى المغزلى

(E S R)

شكل (١٤ - ٦)

G = r.f. signal generator
S = sample mounted in a coil
Hz r.f. magnetic field , B bridge
A r.f. amplifiier, CRO oscilloscope .

Hx is constant static magnetic field slowly modulated by modulator M

الرنين المغناطيسى النووى NMR .Nuclear magnetic resonance :

يوجد لنواة الذرة أيضا كمية حركة زاوية مصاحب لها عزم مغناطيسى يتأثر هو الآخر بالمجال المغناطيسى الخارجي ؛ ويحدث انفلاق فى مستويات الطاقة داخل النواة . يحدث رنين نووى مغناطيسى عندما تتذبذب النواة بين مستويات الطاقة .

رنين السيكلوترون Cyclotron resoance :

عند وضع بلورة شبه موصلة فى مجال مغناطيسى مستمر ، تتحرك الإلكترونات داخلها فى مسارات حلزونية حول اتجاه المجال . أذا كان نصف قطر المسار هو r وسرعة الإلكترون v تكون القوة الطاردة هى :

$$F = \frac{m^* v^2}{r}$$

وهذه القوة تتزن مع قوة لورنز على الألكترون والناشئة عن المجال H

$$F = \frac{H e v}{c}$$

$$\therefore \frac{m^* v^2}{r} = \frac{H e v}{c}$$

عند التأثير بمجال متردد أتجاهه عمودى على اتجاه المجال المستمر يحدث رنين بين تردد المجال المتغير $v = \frac{\omega}{2\pi}$ وتردد الحركة الإلكترونية فى المجال المستمر عندما يتساوى الترددان .

بقياس الامتصاص لطاقة المجال المتردد نحصل على أكبر امتصاص maximum absorption عند حدوث الرنين وبذلك يمكن تعيين تردد الألكترون فى المجال المستمر . من المعادلة السابقة

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{e H}{m^* c}$$

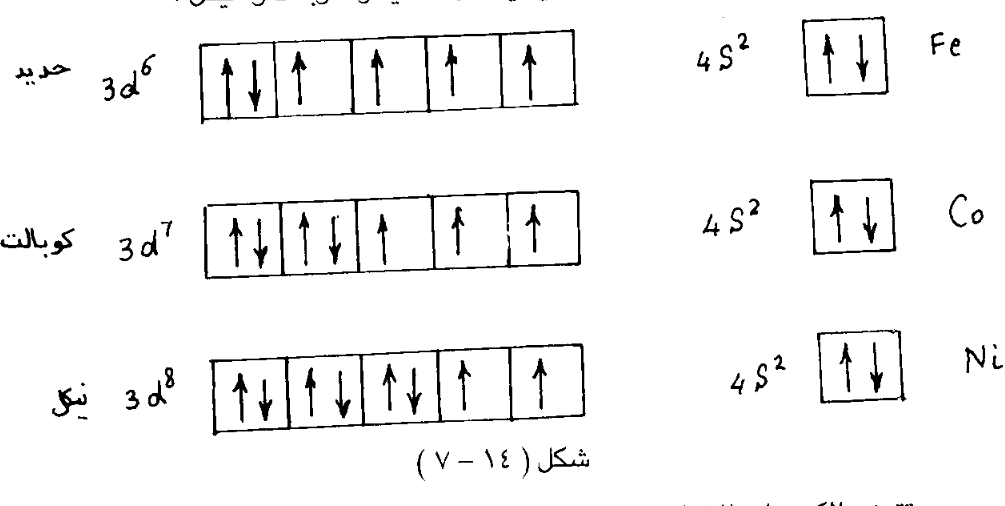
حيث m^* هى الكتلة الفعالة للالكترون فى البلورة . ونظراً لأن هذه التجربة تشبه عادة

ما يحدث داخل السيكاوترون لذلك فتسمى الظاهرة برنين السيكلوترون . وأهميتها فى أنها تسمح بتعيين قيمة الكتلة الفعالة للالكترون m^*

الخاصة الفيرو مغناطيسية : Ferro - magnetism

ينطبق التحليل السابق لمغناطيسية المواد على تلك البلورات التى يكون فيها الأغلفة الداخلية inner shells ممتلئة تماما بالألكترونات وتكون الكترونات التكافؤ valence electrons حرة الحركة فى البلورة . وينشأ العزم المغناطيسى للذرة فى هذه الحالة من الحركة المغزلية لهذه الألكترونات .

أما فى بعض الفلزات فيوجد داخلها أغلفة غير ممتلئة تماما بالالكترونات وفى هذه الحالة تساهم الحركة المدارية بالإضافة الى الحركة المغزلية للألكترونات فى تكوين العزم المغناطيسى لذرات هذه المواد . ويؤدى ذلك إلى قيم مرتفعة جداً للقابلية المغناطيسية . ويطلق على مثل هذه المواد بالفيرو مغناطيسية مثل الحديد والكوبالت والنيكل .



شكل (١٤ – ٧)

تتوزع الكترونات الفلزات السابقة دخل الغلاف (d - shell) على مستويات الطاقة كما مبين بشكل (١٤ – ٧)

أى أن العزم المغناطيسى الذرى لهذه الفلزات (حديد – كوبالت – نيكل) على الترتيب

تساوى أربعة و ثلاثة و أثنين بوهر ماجنتون .

وقد وجد بالتجربة أن القيم الحقيقية للعزم المغناطيسى الذرى لهذه العناصر هى : علي الترتيب : ٢٫٢٢ & ١٫٧٠ & ٠٫٦١ بوهر ماجنتون .

شكل (١٤ – ٨)

ولتفسير ظهور كسور من وحدة العزم المغناطيسى (بوهر ماجنتون) نعتبر نظرية المناطق ، ويبين شكل (١٤ – ٨) النطاقين الأخيرين 3d & 4S فى البنية الإلكترونية للنيكل ويحدها طاقة فيرمى E_F . يشغل فى المتوسط ٠٫٦ الكترون لكل ذره فى نطاق 4S بينما يشغل ٩٫٤ الكترون لكل ذرة فى نطاق 3d .

وطبقا لقاعدة باولى يكون لعدد خمسة الكترونات حركة مغزليه فى اتجاه بينما يكون ٤٫٤ فى الاتجاه الآخر تاركين ٠٫٦ الكترون لكل ذره فى مستويات مفرده لايشغلها ألكترونين كما تفتضيه قاعده باولى .

ويمكن التحقق من ذلك النموذج بتجربة بسيطه .

من المعروف أن للنيكل ، والنحاس نفس البنيه التركيبيه وهى تكعيبيه متمركزة الوجه f.c.c. كما أن لها تقريبا نفس الحجم الذرى . ولذلك يسهل عمل سبيكة من النيكل والنحاس ؛ إذ يمكن لذرات النحاس تبادل مواقعها مع ذرات النيكل . للنحاس ألكترون زيادة عن النيكل ، ولذلك فسوف يفضل هذا الإلكترون شغل مستويات الطاقة الأقل فى ذرة النيكل فى النطاق 3d الغير مكتمل العدد . وكلما أضيفت المزيد من ذرات النحاس للنيكل يستمر شغل ألكترونات النحاس الخارجية للنطاق 3d فى النيكل حتى يمتلئ تماما

وبقياس القابلية المغنطيسية للسبيكة مع زيادة تركيز النحاس فيها نجد نقصاً مستمراً فى القابلية حتى نصل إلى تركيز ٦٠ ٪ نحاس ، ٤٠ ٪ نيكل وعندها تتلاشى تماما الفيرومغنطيسية من المادة ، وتؤول القابلية المغنطيسية إلى الصفر .

وهذا يثبت أن منشأ الفيرومغنطيسية هو : وجود مستويات طاقة فى النطاق 3d غير ممتلئة بالألكترونات بينما النطاق 4S ممتلئ كما هو الحال فى ذرات الحديد والكوبالت والنيكل .

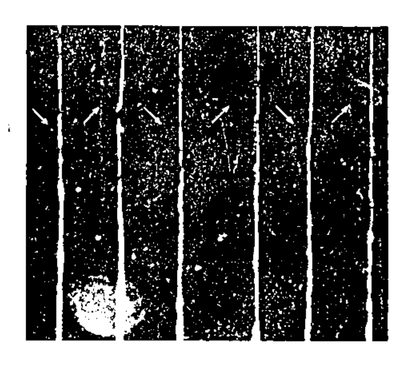
المناطق الفيرو مغناطيسية Ferro - magnetic domains :

فى المواد الفيرو مغناطيسية يكون تأثير المجال المغناطيسى على الحركة المغزلية للإلكترونات قويا مما يسبب أن تتراص هذه الحركات بجوار بعضها محاولة أن تأخذ اتجاة المجال المغناطيسى .

حتى فى حالة عدم وجود مجال خارجى فإن المجالات الجزيئية لهذه المغناطيسيات الجزيئية قد تسبب تراص هذه الحركات المغزلية فى مناطق متجاورة قد تختلف بينها اتجاهات التراص . وتسمى بالمناطق المغناطيسية ، شكل (١٤ - ٩) .

ولا يوجد صلة بين هذه المناطق domains وحبيبات المادة متعددة الحبيبات poly crystalline اذ أن الحبيبة grain الواحدة قد تحتوى على العديد من المناطق المغناطيسية . وعند إيجاد محصلة العزم المغناطيسى لكل هذه المناطق نجد أن العزم يساوى صفرا إذا كانت المادة غير ممغنطة .

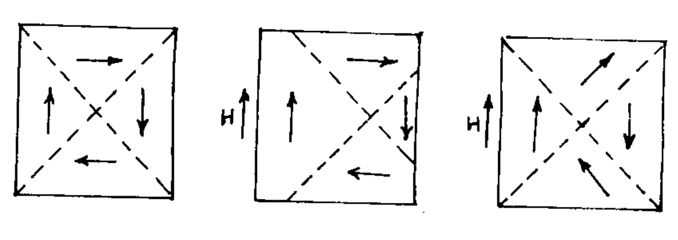
يبين شكل(١٤ - ٩) مادة فيرو مغناطيسية غير ممغنطة العزم الكلى المغناطيسى فيها يساوى صفرا . تبين الأسهم اتجاه المغنطة داخل المناطق المختلفة .



شكل (١٤ - ٩)

كيفية تمغنط المواد الفيرو مغنطيسية : Magnetization processes

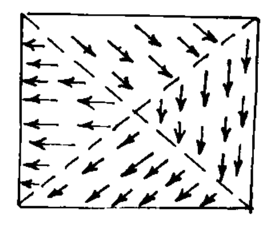
عندما نؤثر بمجال مغاطيسى على المادة الغير ممغنطة يزداد العزم المغنطيسى لها بأحد طريقين أو كليهما : -



شكل (١٤ - ١٠)

أولا : عن طريق تحرك حدود المناطق المغنطيسية حيث تنمو تلك المناطق migration of domain boundaries التى تكون اتجاهات حركتها المغزلية قريبة من اتجاه المجال المغنطيسى الخارجى على حساب تلك المناطق التى يكون اتجاهات حركاتها المغزلية بعيدة عن اتجاه المجال ، شكل (١٤ - ١٠).

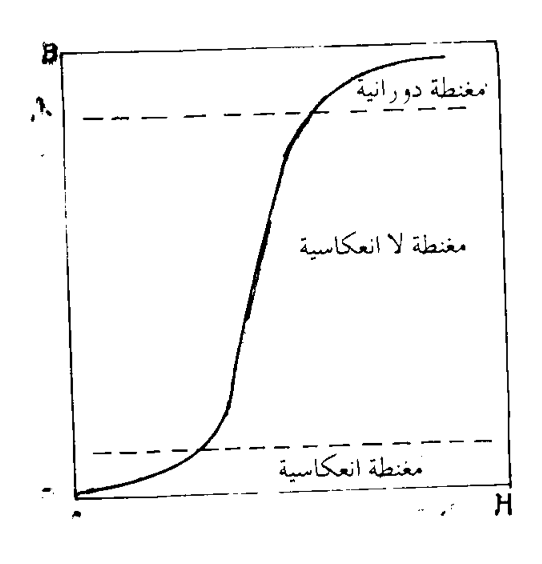
ثانيا : قد يتم التمغنط عن طريق دوران اتجاه الحركات المغزلية وبالتالى دوران اتجاهات العزوم المغنطيسية داخل المنطقة الواحدة . وذلك لكى تتراص الحركات المغزلية فى اتجاه المجال المغنطيسى ، شكل (١٤ - ١١) .



شكل (١٤ - ١١)

وعادة ما تتم الممغنطة فى المجالات الضعيفة بواسطة تحرك حدود المناطق المغنطيسية، ولكن عند ما يكون المجال قويا تتم المغنطة بطريقة دوران اتجاهات العزوم المغنطيسية الجزيئية .

يبين شكل (١٤ - ١٢) منحنى المغنطة حيث تظهر الطرق المختلفة للمغنطة فى المجالات المختلفة .



شكل (١٤ – ١٢)

تأثير درجة الحرارة :

تتأثر المغنطة بدرجة بسيطة عند رفع درجة الحرارة ولكن عند الوصول إلى درجة حرجة Tc تسمى درجة حرارة كورى نجد أن جميع مغنطة المادة تتلاشى وتتحول المادة الفيرو مغنطيسية إلى مادة بارا مغنطيسية فوق تلك الدرجة .

ولكى نفسر السبب فى هذا الانتقال الفجائى من حالة الفيرو إلى حالة البارا مغنطيسية عند الدرجة الحرجة دون حدوث انتقال تدريجى ، نعتبر المغنطة على أنها تحركات تعاونية بين مجاميع المغنطيسات الجزيئية ، وتحتاج الى طاقة عند تغيير اتجاه عزوم هذه المغنطيسيات الأولية .

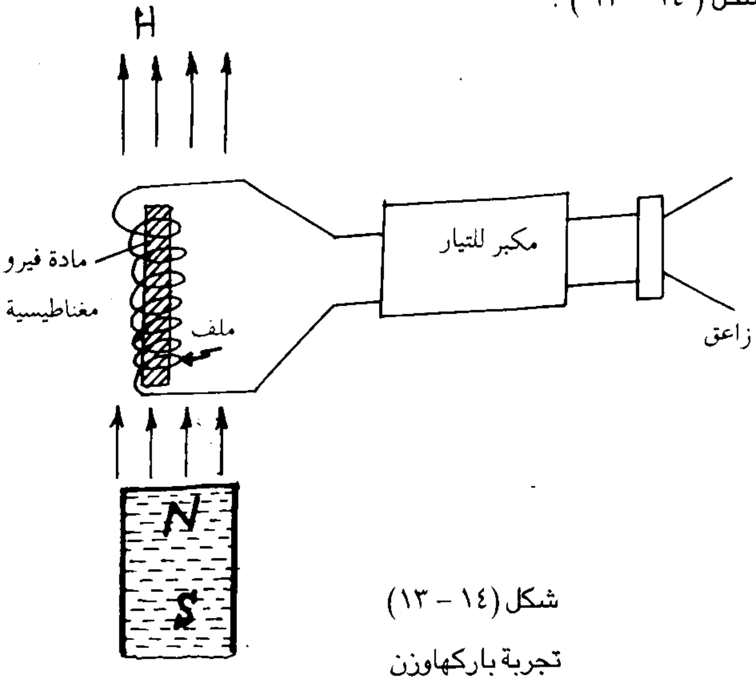
فمثلا فى منطقة مغنطسية معينة داخل مادة فيرومغنطيسية جميع المغنطيسيات الأولية فيها ذات ترتيب خاص واتجاه معين . ولذلك لا يمكن تغيير اتجاه أى مغنطيس أولى واحد فقط من المجموعة عن الاتجاه العام للباقين إذ أن المجموعة كلها تمانع ذلك . ولذلك فإن الطاقة اللازمة لهذا العمل تكون كبيرة جدا لا يستطيع فعلها التهييج الحرارى .

ولكن برفع درجة الحرارة حتى Tc يتلاشى ترتيب اتجاهات هذه المغنطيسات فجأة كما يحدث عادة فى جميع الظواهر التعاونية . Cooperative phenomenon

ظاهرة باركهاوزن : The Barkhausen effect

فى عام ١٩١٩ أثبت باركهاوزن بطريقة غير مباشرة وجود المناطق المغنطيسية magnetic domain structure .

تتركب التجربة من ملف يوضع بداخله المادة الفيرومغناطيسية ويتصل الملف بمكبر للتيار ثم زاعق . شكل (١٤ – ١٣) .



شكل (١٤ – ١٣)
تجربة باركهاوزن

عند تقريب مغنطيس دائم من المادة الفيرومغنطيسية تتغير المغنطة فى المادة .هذا التغير يتم بطريقة فجائية عندما يزداد حجم المناطق المغنطيسية التى تكون المغنطيسيات الأولية فيها مرتبة فى اتجاه المجال الخارجى . فى لحظة ازدياد المغنطة تقطع خطوط القوى المغنطيسية الملف فينشأ عن ذلك تيار تأثيرى ، وتكبير التيار بواسطة المكبر يسمح

بأن نسمع أصوات مميزة لتلك الحركات أثناء التمغنط . وقد قدر التغير فى حجم المناطق كل مرة يسمع فيها صوت بما يعادل ١٠ $^{-٨}$ سم٣ .

أما الاثبات المباشر لوجود مناطق مغناطيسية فقد تم بواسطة اشكال بيتر Bitter patterns وذلك عام ١٩٣١ م .

وتتلخص الطريقة فى تحضير سطح البلورة الفيرومغناطيسية بعناية بحيث يكون أملسا . ثم توضع عليه قطره من محلول غروى colloidal solution يحتوى معلقا دقيقا من مادة فيرومغناطيسية مثل الماجنتيت magnetite (سوداء اللون)

عند النظر تحت الميكروسكوب الضوئى لسطح البلورة نجد أن هذه الذرات المعلقة بالمحلول (ذرات الماجنتيت) قد شكلت خطوطا سوداء يطلق عليها أشكال بيتر . وترسم هذه الخطوط حدود المناطق المغناطيسية على السطح .

والسبب فى انجذاب جزيئات الماجنتيت لحدود المناطق هو أن بالقرب من هذه الحدود توجد مجالات مغناطيسية قوية محلية تجذب هذه الجزيئات .
strong local magnetic fields .

مسائل علي الباب الرابع عشر

١ – القابلية المغناطيسية للنحاس (-0.5×10^{-5}) أوجد العزم المغناطيسى لوحدة الحجوم فى النحاس إذا وضع فى مجال مغناطيسى تكون شدته 10^4 amp /m داخل النحاس ،

٢ – إستخدم معادلة لانجفين للديا مغناطيسية لتعين القابلية المغناطيسية للنحاس مع اعتبار أن نصف قطر الذرة $(1\ A^{o})$ وأن الكترونا واحدا فى كل ذرة هو المسئول عن هذه القابلية ؟

٣ – وضع نظام بارا مغناطيسى من ثنائيات القطب المغناطيسى الناشئة عن اللف الإلكترونى فى مجال شدته 10^5 amp m^{-1} أوجد متوسط العزم المغناطيسى لكل ثنائى قطب عند درجة 300 K وعند 1 K ؟

٤ – أوجد الترددات التى يمكن توقعها فى تجربة رنين اللف الإلكترونى لمادة الصوديوم عند وضعها فى مجال شدته 10^6 amp m^{-1} ؟

٥ – درجة حرارة كورى للحديد 1043 K ، فإذا اعتبرنا أن لذرة الحديد عزم مغناطيسى يساوى عدد اثنين بوهر ماجنتون أوجد :

أ – العزم المغناطيسى عند التشبع saturation magnetisation ؟

ب – ثابت كورى ؟

جـ – مقدار المجال الداخلى internal field ؟

٦ – احسب تردد لارمور للف الإلكترونى فى مجال مغناطيسى 5×10^{-2} T

٧ – أوجد القابلية البارا مغناطيسية لوحدة الحجوم من السيزيوم عند درجة 300 K.
طاقة فيرمى للسيزيوم $E_F = 1.55$ eV .

٨ – اعتبر كمية الحركة الزاوية الكلية للإلكترون هى $\sqrt{S(S+1)}$
وليست $S = \frac{1}{2}$ وأوجد متوسط العزم المغناطيسى للذرات البارامغناطيسية ؟

٩ – ظهـــر رنـين ســـيكلوترون فى الرصــــاص عند تردد 8900 MHz ومـجـال
مغناطيسى 0.24 Wb / m^2 أوجد الكتلة الفعالة للإلكترون فى الرصاص ؟

الباب الخامس عشر

نظرية العوازل Theory of Dielectries :

سبق أن بينا أن التوصيل الكهربائى فى الفلزات وأشباه الموصلات ينشأ عن الحركة شبه الحرة لحاملات الشحنة ، وهناك مواد أخرى تكون فيها الإلكترونات وحتى إلكترونات التكافؤ مقيده بنويات ذراتها مما يجعل التوصيل الإلكتروني لها منعدما .

وتصف نظرية المناطق مثل هذه المواد بأن لها طاقة ثغرة Energy gap كبيرة بين منطقتى التكافؤ والتوصيل قد تصل إلى بضعة الكترون فولت . وتسمى هذه المواد بالعوازل.

فذرات المواد العازلة تتكون من نويات موجبة التكهرب يحيط بها شحنات سالبة حيث تنطبق مراكز الشحنة الموجبة والسالبة فى كل جزء منها . وعندما يؤثر على مثل هذه المواد مجال كهربائى يحدث استقطاب كهربائى ينشأ عنه ثنائيات قطب محليه فى أجزاء المادة المختلفة local dipoles . وفى بعض المواد العازلة تشكل مجاميع الأيونات أو الجزيئات ثنائيات قطب دائمة تظهر حتى فى حالة انعدام المجال الكهربائى الخارجى ، وبدهى أنه عند التأثير بمجال خارجى تترتب هذه الثنائيات قطب فى اتجاهات توازى اتجاه المجال ، وتتأثر عملية الاستقطاب هذه بعامل التهييج الحرارى وهى لذلك تعتمد على درجة الحرارة .

تعريفات وعلاقات فى الكهرواستاتيكا

١ - تعرف شدة المجال الكهراستاتيكى ، E ، بالقوة التى تؤثر على وحدة الشحنة الموجبة الموضوعة عند هذه النقطة .

$$F = q.\ E$$

٢ - القوة بين شحنتين نقطيتين q_2 , q_1 تفصلهما مسافة r هى :

$$F = \frac{q_1 \ q_2}{4 \pi \varepsilon_0 r^2}$$

حيث ε_0 هى نفاذية الفراغ وقيمتها ٨.٨٥ × ١٠^-١٢ فاراد / متر

٣ – شدة المجال فى الفراغ على مسافة r من شحنة q هى :

$$E = \frac{q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2}$$

٤ – عند التأثير بمجال كهربائى على مادة عازلة ينتج عن ذلك استقطابا يعرف بعزم ثنائى القطب الكهربائى لوحدة الحجوم وتكون إزاحة العزل الكهربائى dielectrie displacement D هى :

$$D = \varepsilon . E$$

حيث ε هى نفاذية المادة .

٥ – مقدار الشحنة Q على لوحى المكثف ذو اللوحين المتوازيين هى :

$$Q = C V$$

حيث C هى سعة المكثف ، V هى : فرق الجهد بين لوحيه وتكون سعة المكثف C هى:

$$C = \frac{A}{\varepsilon d}$$

حيث A هى : مساحة لوح المكثف ،

d هى : المسافة بين اللوحين ،

ε هى : نفاذية الوسط بين اللوحين .

ويلاحظ أن إدخال وسط عازل بين لوحى المكثف يسبب زيادة فى سعته ، وتقاس هذه الزيادة بثابت العازل للمادة K ويساوى النسبة بين نفاذية المادة إلى نفاذية الفراغ أى أن ثابت العازل هو :

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

قياس ثابت العازل :

يقاس ثابت العازل لمادة بمقارنة سعة مكثف ما C_d عندما تكون المادة بين لوحيه إلى سعة نفس المكثف C_0 وبين لوحيه فراغ .

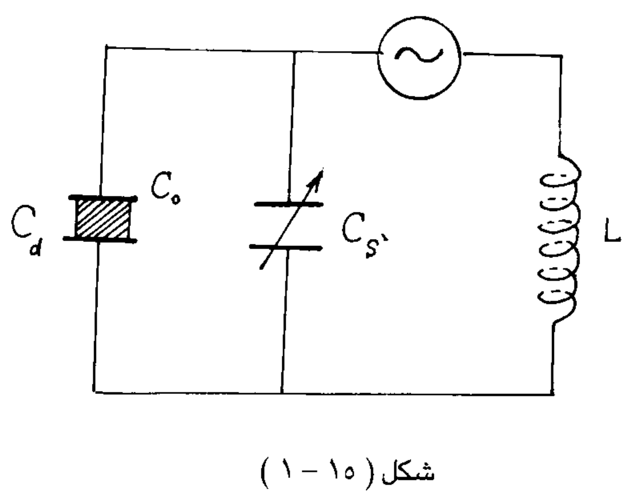
أى أن

$$K = C_d / C_0$$

ويمكن قياس السعة بدائرة رنين كهربائية تحتوى ملف حث L ومكثف متغير السعة C_s ومصدر كهربائى متردد كما مبين بشكل (١٥ – ١) C_d , C_0 هما سعتى المكثف وبه العازل مرة والهواء مرة أخرى .

C_s مكثف عيارى .

عند الحصول على رنين فى الدائرة والمكثف C_0 خال من المادة العازلة تؤخذ قراءة المكثف C_s ثم يوضع العازل فى المكثف فتصبح سعته C_d ويعاد ضبط حالة الرنين وتؤخذ مرة ثانية قراءة المكثف C_s ومن القراءتين تحسب السعة C_d , C_0 ومنهما نوجد ثابت العزل K .



شكل (١٥ – ١)

الاستقطابية الاستاتيكة للجزيئات الحرة :

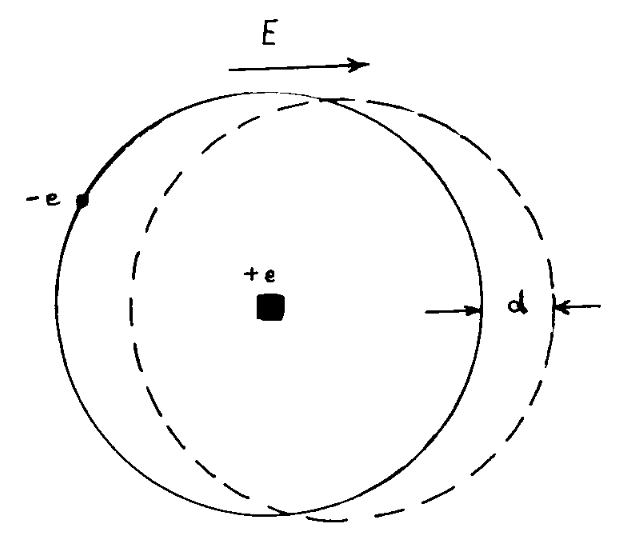
عند التأثير بمجال كهربائى على ذرات أو جزيئات حرة تنشأ فيها حالة من الاستقطاب الكهربائى تعود إلى أحد العوامل التالية :

(١) استقطابية الكترونية Electronic polarizability :

يحدث بتأثير المجال الكهربائى إزاحة نسبية r بين مركز الشحنات الموجبة

والسالبة على الذرة ويتكون عن ذلك ثنائى قطب كهربائى (انظر شكل ١٥ - ٢) عزمة يساوى حاصل ضرب الشحنة فى المسافة ويكون متجها من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة ، ففى حالة ذرة الأيدروجين يكون عزم ثنائى القطب فيها هو $p = e \cdot d$ حيث e هى شحنة الإلكترون .

أما إذا اعتبرنا نظاما أو جزيئا متعادلا يحتوى عدد من الشحنات q_i التى تبعد مسافة r_i عن مركز مشترك فإن عزم ثنائى القطب حينئذ يكون $p = \Sigma_i \; q_i \; r_i$



استقطاب ذرة الأيدروجين فى مجال كهربائى

شكل (١٥ - ٢)

وبدهى أن هذا العزم يتلاشى فى حالة عدم وجود المجال الكهربائى حيث يكون $\Sigma_i \; q_i = 0$ للنظام المتعادل .

(٢) استقطابية أيونية ionic polarizability :

عندما يتركب الجزىء من أيونات فإن مواضعها تتأثر بالمجال الكهربائى ويحدث لها إزاحات نسبية ، وينشأ نتيجة لذلك تغير فى أبعاد الروابط بين ذرات الجزىء ،

وكذلك فى اتجاهاتها فى الفراغ مما يتسبب عنه إزاحة مركز الشحنات السالبة عن مركز الشحنات الموجبة فى الجزىء ، فيحدث الاستقطاب الأيونى .

(٣) الاستقطابية المتجهة orientation polarizability :

تتميز بعض المواد بوجود ثنائيات قطب دائمة فيها حتى فى حالة انعدام المجال الكهربائى ، وعند التأثير بالمجال تدور محاور ثنائيات القطب هذه لتترتب فى اتجاه المجال الكهربائى .

وينشأ عن ذلك استقطابية تسمى بالاستقطابية المتجهة .

القابلية الكهربائية والاستقطابية :

Electric susceptibility and polarizability

تعرف كثافة الاستقطاب P فى مادة بأنها العزم الكلى لثنائى القطب فى وحدة الحجوم الناشىء عن مجال كهربائى E وتعطى مقياسا للشحنات داخل العازل فى المجال ، حيث :

$$P = (C_d - C_0)\ V = \varepsilon E - \varepsilon_0 E$$

$$K = \varepsilon / \varepsilon_0$$

$$\therefore\ P = (K - 1)\ \varepsilon_0\ E$$

$$\therefore\ K = 1 + P / \varepsilon_0\ E$$

أى أن :

$$(K - 1) = P / \varepsilon_0\ E$$

$$= \chi_e$$

حيث χ_e هى : القابلية الكهربائية للمادة . وإذا اعتبرنا وحدة الحجوم منها حيث يوجد عدد N ذرات فان كثافة الاستقطاب تكون :

$$P = N p = \varepsilon_0\ \chi_e\ E$$

حيث p هو عزم ثنائى القطب الأولى .

$$\therefore\ P = \varepsilon_0 \frac{X_e}{N} E$$

$$= a\ .\ E$$

حيث $a = \dfrac{\varepsilon_0 X_e}{N}$ تسمى بالاستقطابية .polarizability وهى كما ذكرنا على ثلاثة أنواع نبينها تفصيليا فيما يلى :

(١) الاستقطابية الإلكترونية a_e :

نفرض ذرة متعادلة على نواتها شحنة موجبة Ze + يحيث بها سحابة الكترونية كرية ومنتظمة شحنتها Ze – نصف قطرها R . عند التأثير بمجال كهربائى تحدث إزاحة للسحابة الإلكترونية بالنسبة للنواة بمقدار d وتستمر كذلك تحت تأثير قوى متوازنة .

القوة المؤثرة على السحابة الإلكترونية هى :

$$F_E = Ze\ .\ E$$

وتتزن هذه القوة مع قوة تجاذب الشحنات السالبة والموجبة وهى :

$$F_c = \frac{(Ze)^2}{4\ \pi\ \varepsilon_0 R^2} \cdot \left(\frac{d}{R}\right)$$

ويمكن للطالب إثبات ذلك بسهولة .

وبمساواة F_E مع F_c نحصل على :

$$d = 4\ \pi \varepsilon_0\ E\ R^3 / Ze$$

ولكن عزم ثنائى القطب الأولى هو :

$$p = Ze\, d$$

$$\therefore\ p = 4\ \pi \varepsilon_0 E\ R^3$$

وتصبح الاستقطابية الإلكترونية a_e مساوية إلى

$$a_e = \frac{p}{E} = 4 \pi \varepsilon_0 R^3$$

ويلاحظ أن قيمة a_e تعتمد فقط على الحجم الذرى .

تغير a_e بتردد المجال :

إذا أثرنا بمجال كهربائى متردد $E \sin \omega t$ على مادة عازلة يتغير اتجاه متجه الاستقطاب تغيرا توافقيا بسيطا وتكون معادلة الحركة فى المجال هى :

$$\ddot{x} + \omega_0 x = -(eE/m) \sin \omega t$$

حيث ω_0 هو التردد الطبيعى لذبذبة ثنائى القطب ، ω هو تردد المجال المؤثر .

وبدهى أنه عندما نؤثر على المادة بمجال استاتيكى غير متردد فإن $\omega = 0$

وإذا أهملنا القوى المقاومة لحركة ثنائى القطب وباعتبار أن الإزاحة x تخضع لمعادلة تغير توافقى بسيط .

$$x = x_0 \sin \omega t$$

حيث x_0 سعة الحركة ، فإننا نجد عن طريق حل المعادلة التفاضلية :

$$-e x_0 = e^2 E / m \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$$

وتكون بذلك الاستقطابية الإلكترونية :

$$a_e = e^2 / m \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$$

ونظرا لأن قيمة الاستقطابية تساوى $١٠^{-٤}$ تقريبا لذلك فإن قيمة ω تكون فى حدود $١٠^{١٥}$ ذبذبة فى الثانية وهى أكبر كثيرا من قيم التردد لموجات الطيف المنظور ، ويمكن لذلك اعتبار أن الاستقطابية الإلكترونية مهملة القيمة لمعظم المواد العازلة فى المنطقة المنظورة للمجالات الكهرومغناطيسية .

(٢) الاستقطابية الأيونية a_i :

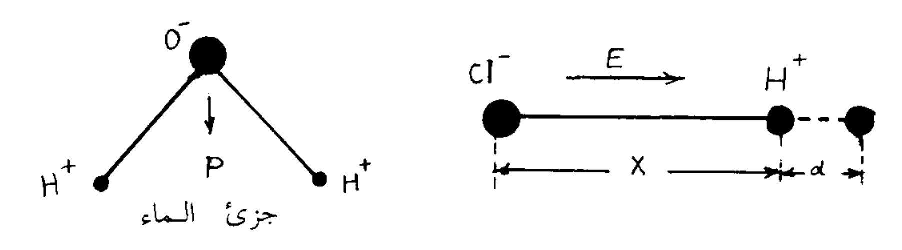
تحتوى جزيئات المواد الأيونية على شحنات موجبة وأخرى سالبة تتوزع بشكل خاص فى الفراغ يتوقف على التركيب الجزيئى للمادة ، ويتوقف على هندسة التوزيع لهذه الشحنات فى الجزىء عزم ثنائى القطب . فمثلا جزىء ثانى أكسيد الكربون CO_2 جزىء متماثل تركيبه هو :

$$\overline{O} = {}^{+}C^{+} = \overline{O}$$

ونتيجة لهذا التماثل يتلاشى عزم ثنائى القطب فيه .

أما جزىء المادة H_2O فإن له عزم ثنائى قطب يساوى تقريبا ١,٩ × ١٠ $^{-١٨}$ وحدة سم جم ث وذلك نسبة لتركيبه الهندسى وعدم تطابق مركزى الشحنات الموجبة والسالبة فيه ، شكل (١٥ - ٣)

وعند التأثير على مثل هذا الجزىء بمجال كهربائى يسبب إزاحة المركزين نسبيا عن بعضهما بمسافة d وإذا كانت الشحنة هى q فإن عزم ثنائى القطب يكون $p = q \cdot d$ وتستخدم الطرق الطيفية عادة لتعيين تمدد الرابطه بين الأيونات فى وجود المجال وذلك عند تعين p .



شكل (١٥ - ٣)

وعند تطبيق ذلك على بلورات أيونية مثل كلوريد الصوديوم نوجد الإزاحة d بين مركزى الشحنات الموجبة والسالبة فى الشبيكة بتأثير مجال كهربائى ، وذلك باعتبار شبيكة طولية ثنائية التركيب تتكون من تعاقب أيونات موجبة وسالبة ، وبتشعيع هذه الشبيكة بأمواج كهرمغناطيسية : $E = E \cdot e^{-i\omega t}$ يمكن إيجاد سعة الإزاحة لكل أيون فيها (أنظر باب ديناميكا الشبيكه) على الشكل الآتى :

$$\eta = \frac{e E / M}{\omega_0^2 - \omega^2} \; ; \; \zeta = \frac{-e E / m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

حيث m , M هما كتلتى الأيونين المكونين للشبيكة ، ω هو التردد المستعرض للشبيكة (الفونونات الضوئية) .

ولكى نحسب الاستقطابية الأيونية ; a_i نوجد أولا الإزاحة النسبية للأيونين .

$$d = (\eta - \zeta)$$

ومن ثم تكون :

$$a_i = e\, d / E$$

فإذا اعتبرنا مجالا كهربائيا استاتيكيا يمكننا التعويض فى المعادلات السابقة بقيمة صفرية لتردد المجال ω وبذلك يكون :

$$d = (\eta - \zeta) = e\, E \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) / \omega_0^2$$

ويصبح عزم ثنائى القطب :

$$p = e.\, d = e^2\, E \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) / \omega_0^2$$

أى أن الاستقطابية الأيونية هى :

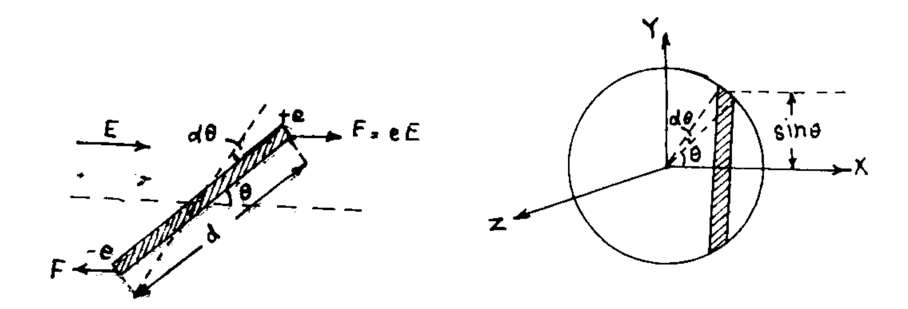
$$a_i = \frac{p}{E} = e^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) / \omega_0^2$$
$$= e^2 / m^* \omega_0^2$$

حيث $m^* = \frac{m\, M}{m + M}$ هى الكتلة الفعالة (reduced mass) لزوج الأيونات المكون لثنائى القطب .

(٢) الاستقطابية المتجهة a_0 :

اعتبر الآن مادة عازلة تتكون من جزيئات قطبية لها عزم ثنائى قطب دائم p تكون القوة F التى تؤثر على كل قطب نتيجة لمجال كهربائى E هى $F = e\, E$ وتعمل فى اتجاه المجال بالنسبة للشحنة الموجبة ، وفى عكس اتجاه المجال بالنسبة للشحنة السالبة ، ينتج عن ذلك ازدواجا عزمه C يعمل على دوران ثنائى القطب فى اتجاه المجال أى لإنقاص الزاوية θ التى يعملها ثنائى القطب مع اتجاه المجال المؤثر ، شكل (١٥ - ٤) .

$$\therefore\ C = e\, E\, d\, \sin\theta$$
$$= p\, E\, \sin\theta$$



شكل (١٥ - ٤)

نفرض أن ثنائى القطب قد دار بزاوية صغيرة $d\,\theta$ الزيادة فى طاقة الموضع يساوى $C\,d\,\theta$ بواسطة التكامل نحصل على طاقة الموضع الكلية U لثنائى القطب فى المجال E.

$$U = \int C\,d\,\theta$$

$$= \int p\,E \sin\theta \; d\,\theta$$

$$= - P\,E \cos\theta$$

عند انعدام المجال الكهربائى يكون توزيع اتجاهات ثنائيات الأقطاب فى الفراغ توزيعا عشوائيا عند أى درجة حرارة T ولكن عند وجود المجال يكون احتمال وجود ثنائى القطب فى اتجاه يعمل زاوية تقع بين θ ، $\theta + d\,\theta$ مع اتجاه المجال هو :

$$2\pi \;\sin\theta \; d\,\theta \; \exp\,(-U/kT)$$

وذلك كما يمليه إحصاء ماكسويل وبولتزمان .

وتكون الزيادة فى الاستقطاب الناشئة عن أى ثنائى قطب هى مركبة عزمة في اتجاه المجال أى $p\cos\theta$ وتكون الزيادة المتوسطة لعزم ثنائى القطب هى p ونحصل عليها بالتكامل من زاوية $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$

$$P = \frac{\int_0^{\pi} p \cos \theta . 2 p \sin \theta \, d \theta \; . \exp (-U/kT)}{\int_0^{\pi} 2 \pi \sin \theta \, d \theta \; \exp (- U/kT)}$$

ولحل التكامل نستخدم التعويضات التالية :

$$B = \cos \theta \; ; \; y = p E / k T$$

وبذلك نحصل على :

$$\bar{p} = \frac{p \int_{-1}^{+1} e^{By} . B \, d B}{\int_{+1}^{-1} e^{By} \, d B}$$

$$= p \frac{d}{dy} \left[\log \int_{-1}^{+1} e^{By} \, d B \right]$$

$$= p \left[\frac{d}{dy} \log (e^{y} - e^{-y}) - \frac{d}{dy} \log y \right]$$

$$= p \left(\coth y - \frac{1}{y} \right)$$

$$= p L (y)$$

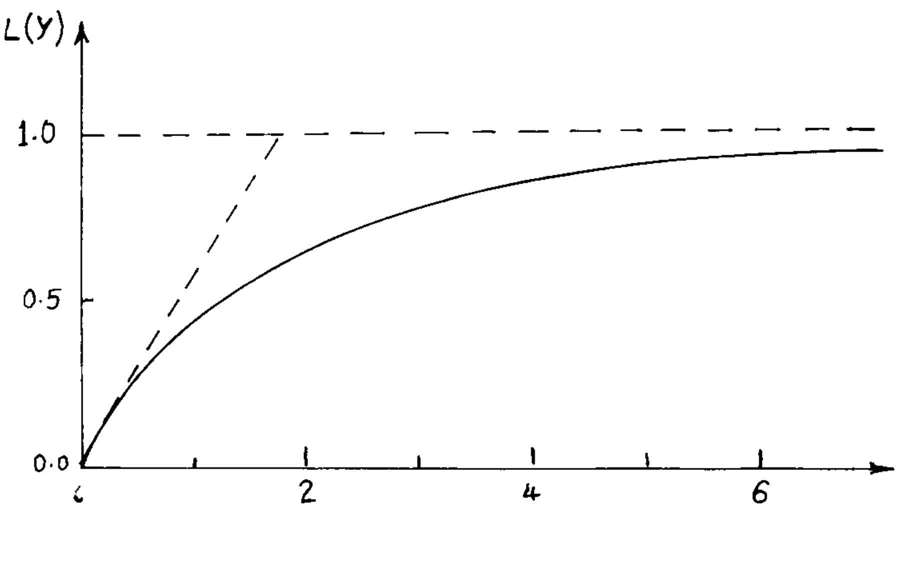
وإذا كان هناك عدد N ثنائيات قطب فى وحدة الحجوم من المادة فإن الزيادة الكلية للعزم فى وحدة الحجوم هى :

$$p_0 = N \bar{p} = N p L (y)$$

وتعرف $L (y)$ بدالة لانجفين وتقترب قيمتها من الصفر عندما تؤول قيمة y إلى الصفر بينما تأخذ قيمتها الوحدة للقيم الكبيرة من y كما فى شكل (١٥ – ٥) .

ويلاحظ أن ميل المماس للمنحنى بين $L (y)$ مع y بالقرب من $y = 0$ يساوى $\frac{١}{٣}$

ويمكن إثبات ذلك رياضيا كما يلى بفك الدالة $L (y)$



شكل (١٥ – ٥) $y = PE/KT$

$$\coth y = \frac{1}{y} + \frac{y}{3} - \frac{y^2}{45} + ..$$

$$\therefore L(y) = \left(\coth y - \frac{1}{y}\right) = \frac{y}{3}$$

وذلك بإهمال الحدود التالية :

وعلى ذلك فعند درجات الحرار المرتفعة والمجالات الصغيرة يمكن تقريب الاستقطاب المتجه فى وحدة الحجوم إلى :

$$p_0 = N p^2 E / 3kT$$

وتكون الاستقطابية المتجهة هى :

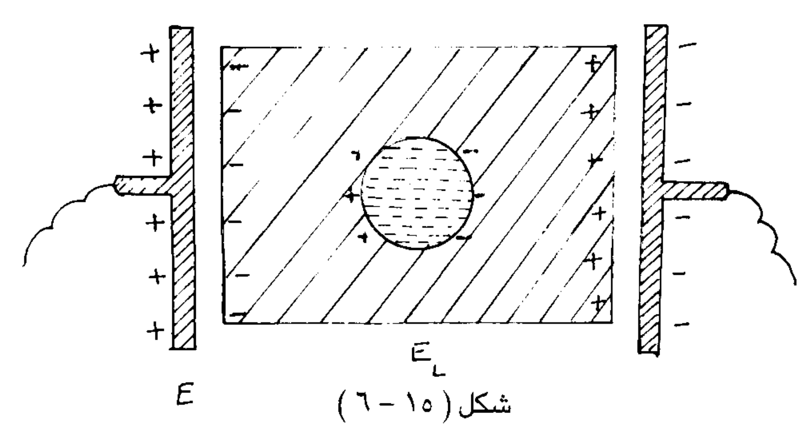
$$a_0 = \frac{p_0}{NE} = p^2 / 3kT$$

ويلاحظ أنه فى حالة وجود أكثر من نوع واحد للاستقطاب تجمع كل أصنافه وتكون الاستقطابية الكلية هى :

$$a = \left(a_e + a_i + p^2 / 3kT\right)$$

المجال المحلى فى العوازل الجامدة :

فى العوازل الجامدة لا تتأثر ذراتها وجزيئاتها بالمجال الكهربائى الخارجى فحسب ، وإنما أيضا تتأثر بثنائيات القطب المحيطة ، والتى نتجت بفعل المجال المؤثر شكل (١٥ -٦). وعلى ذلك يمكن تقسيم المجال المؤثر على ذرة أو جزىء ما فى العازل إلى الأجزاء التالية :



شكل (١٥ - ٦)

١ - المجال الخارجى الناشىء عن الشحنات كالموضوعة على لوحي المكثف المحتوى على المادة العازلة .

٢ - مجال معاكس للاستقطاب de polarizing field وتنشأ عن الشحنات التأثيريه المعاكسة والتى تكون على سطحى العازل المقابلين للوحى المكثف (أنظر شكل ١٤- ٦) .

ويكون مجموع المجالين السابقين هو المجال الماكروسكوبى المؤثر على العازل ، E .

٣ - مجال لورنتز E_L وينشأ عن استقطاب الشحنات داخل سطح افتراضى داخل العازل يحيط بالذرة أو الجزىء المعنى على أن يكون نصف قطر هذا السطح كبيراً بالنسبة لأبعاد الذرة وصغيرة بالنسبة لأبعاد العازل نفسه .

٤ - المجال الناشىء عن ثنائيات الأقطاب الموجودة داخل السطح الافتراضى نفسه ويؤخذ فى الاعتبار تأثير ثنائيات القطب المجاورة وما بعد المجاورة للذرة .

ويمكن إهمال ذلك الجزء من المجال إذا كان التركيب البلورى للمادة تكعيبيا متماثلا .

وعلى ذلك فإن المجال المحلى المؤثر على أى ذرة فى العازل يساوى :

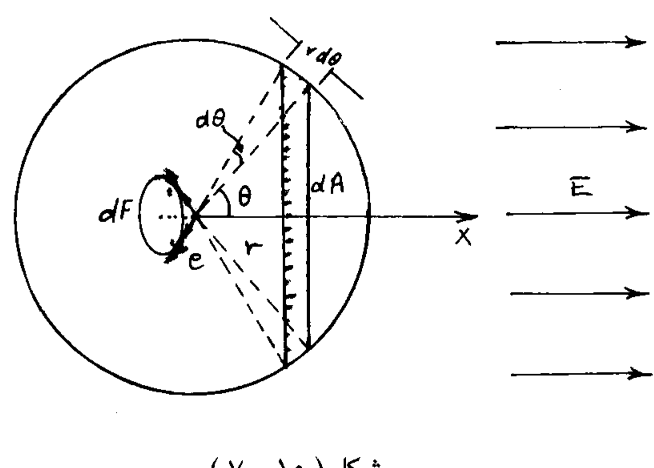
$$E_{Local} = E + E_L$$

حساب مجال لورنتز E_L :

لإيجاد مجال لورنتز نعتبر السطح الافتراضى المبين بشكل (١٥ - ٧) ونأخذ عنصراً مساحته $d\,A$ على شكل حلقه . من هندسة الشكل :

$$d\,A = 2\,\pi\,r^2\,\sin\theta\,d\,\theta$$

الشحنة الكهربائية على هذه المساحة $d\,A$ تساوى :



شكل (١٥ - ٧)

$$Q = p\,\cos\theta\;2\,\pi\,r^2\,\sin\theta\,d\,\theta$$

وبتطبيق قانون كولوم تكون القوة $d\,F$ المؤثرة من هذه الشحنة Q على شحنة e موجودة عند مركز السطح هى :

$$d\,F = e\,Q\,/\,4\,\pi\,\varepsilon_o\,r^2$$

حيث r نصف قطر السطح الافتراضى .

مركبة هذه القوة فى الاتجاه السينى وهو فى نفس الوقت اتجاه المجال المؤثر هى :

$$dF_x = e\ Q\ \cos\ \theta / 4\pi \varepsilon_o r^2$$

$$= \frac{e\,p\ \cos\ \theta\ .\ 2\pi\ r^2\ \sin\ \theta\ d\ \theta\ .\ \cos\ \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

وبإجراء التكامل نحصل على مركبة القوة الكلية في اتجاه المجال :

$$F_x = \int_0^{\pi} dF_x$$

$$= e\,p\ /\ 3\ \varepsilon_0$$

ويكون مجال لورنتز هو :

$$E_L = \frac{F_x}{e} = \frac{p}{3\,\varepsilon_0}$$

ويكون المجال المحلى عند نقطة فى شبيكة تكعيبية هو :

$$E_{Loc.} = E + \frac{P}{3\,\varepsilon_0}$$

علاقة كلوزيوس - موزوتى :

تحدد هذه العلاقة الاستقطابية الكهربائية لذرات مادة عازلة إذا عرف لها ثابت العازل k .

عزم ثنائى القطب لذرة مفردة هو :

$$p = a\ .\ E_{Loc.}$$

ويكون الاستقطاب معرفا بعزم ثنائيات القطب لوحدة الحجوم من العازل هو :

$$P = \Sigma\ N_i\ a_i\ E_{Loc.} \qquad (i)$$

حيث N_i هو عدد الذرات فى وحدة الحجوم ، والجمع Σ يؤدى على جميع الذرات من نوع i الذى له استقطابيه a_i ويوجد فى مجال محلى (i) E_{Loc}

من معادلة لورنتز

$$E_{Loc.} = E + P/3\ \varepsilon_0$$

$$\therefore \left(P / \Sigma_i N_i a_i\right) - \left(P/3\varepsilon_0\right) = E$$

$$\therefore E/P = \frac{1 - \left(1/3\varepsilon_0\right) \Sigma N_i a_i}{\Sigma N_i a_i}$$

وباستخدام معادلة القابلية الكهربائية

$$\chi_e = (K - 1) = P/\varepsilon_0 E$$

نحصل على :

$$E/P = 1/\varepsilon_0 (K - 1)$$

وبحل المعادلتين لإيجاد $\Sigma N_i a_i$ نحصل على :

$$\frac{1}{3\varepsilon_0} \Sigma N_i a_i = \frac{K - 1}{K + 2}$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة كلوزيوس – موزوتى ويلاحظ أن الاستقطابية هنا مضافة أى أن :

$$\Sigma N_i a_i = (N_e a_e + N_0 a_0 + N_i a_i)$$

فى منطقة المجالات الكهرمغناطيسية للترددات فى الطيف المنظور يرتبط ثابت العزل للمادة K بمعامل انكسارها الضوئى n بالعلاقة :

$$n^2 = K$$

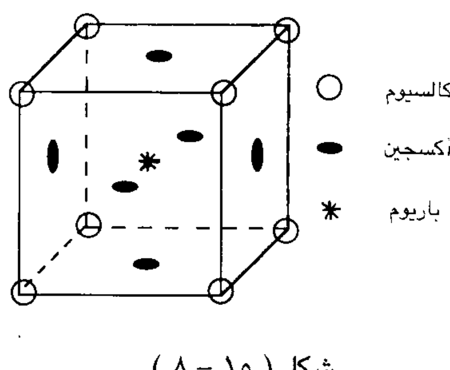
وتكون الإضافات إلى الاستقطابية الناشئة عن الاستقطاب الأيونى أو الاستقطابية المتجهة إضافات صغيرة تتوقف على كبر عزم القصور الذاتى للجزىء ، أو للأيون وتقتصر الزيادة فى الاستقطاب على الجزء الإلكترونى .

الفيروكهربية Ferro-electricity :

المادة الفيروكهربية هى مادة لها استقطاب ذاتى وبالتالى لها عزم ثنائى قطب كهربائى حتى فى غياب المجال الكهربائى الخارجى ، ولا توجد ظاهرة الفيروكهربية فى المواد التى ينطبق فيها مركزى تماثل الشحنات السالبة والموجبة على بعض كما هو الحال فى البلورات

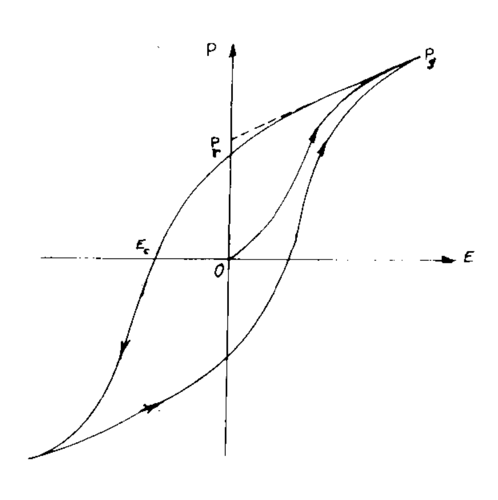
الأيونية ، أى أن وجود عدم تماثل فى التركيب البلورى شرط ضرورى للحصول على الحالة الفيروكهربية فى البلورة .

وأمثلة على هذه المواد هى بلورات أملاح روشيل وتيتانات الباريوم وأمثالها مما له تركيب بلورى من نوع بيروفسكيت perovskite المبين بشكل (١٥ - ٨).



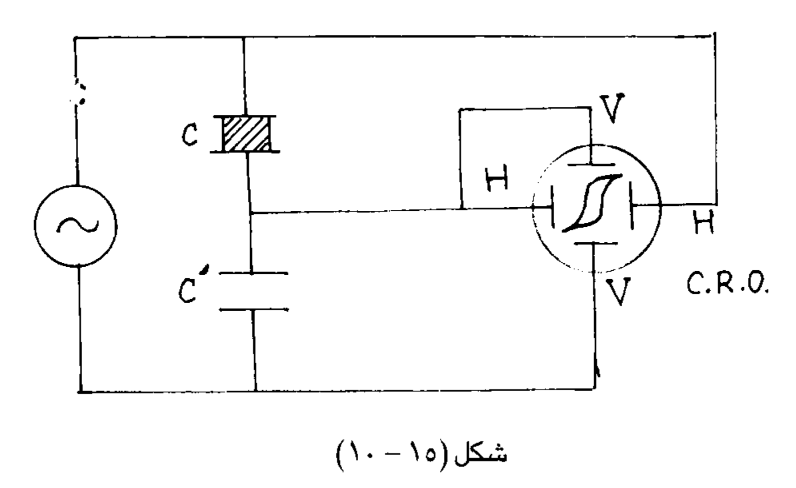
شكل (١٥ - ٨)

عند التأثير بمجال كهربائى متردد على بلورة فيروكهربية نجد تخلفا للاستقطاب P عن المجال المؤثر E ، وينشأ عن رسم العلاقة بين E & P دائرة تخلف كهربائى كما مبين بشكل (١٥ - ٩) ويصل الاستقطاب إلى مرحلة التشبع p_s بعد التأثير بمجال معين كما أنه بإزالة المجال يتبقى جزء من الاستقطاب p_r ويسمى بالاستقطاب المتبقى remenant polarization ونحتاج لإزالة هذا الاستقطاب المتبقى التأثير بمجال كهربائى معاكس قدرة E_c ويسمي بالمجال المزيل E_c. coercive field .



شكل (١٥ - ٩)

يبين شكل (١٥ – ١٠) دائرة كهربائية بسيطة لإظهار دائرة التخلف الكهربائى على شاشة راسم ذبذبات الكترونى ، توضع المادة الفيروكهربية داخل المكثف C الذى يتصل على التوالى بمكثف آخر C^1 وبمصدر جهد متردد .



شكل (١٥ – ١٠)

يسقط الجهد الكهربى على سطحى المادة الفيروكهربية على اللوحين الأفقيين لراسم الذبذبات بينما يسقط الجهد على سطحى المكثف C^1 على اللوحين الرأسيين ، عندئذ تظهر دائرة التخلف الكهربائى على شاشة راسم الذبذبات .

الفيروكهربية ودرجة الحرارة :

تختفى ظاهرة الفيروكهربية عند الارتفاع بدرجة الحرارة إلى درجة T_c تسمى بنقطة كورى للفيروكهربية ، وعند هذه الدرجة تحدث زيادة مفاجئة فى ثابت العزل للمادة ، وتتحول المادة بعد هذه الدرجة من حالة الفيروكهربية إلى حالة الباراكهربية (أسوة بما يحدث للمواد المغناطيسية) ويتغير ثابت العازل مع درجة الحرارة T في هذه المنطقة وفقا لقانون كورى – فايس Curie - Weiss

$$K = A (T - T_c) + K_f$$

حيث A هو ثابت كورى ، K_f هو ثابت العازل للترددات المرتفعة ويمثل الإضافة الناشئة عن الاستقطابية الإلكترونية وقيمته صغيرة ويمكن أهمالها بالقرب من درجة حرارة

كورى .

ويمكن إثبات أن ثابت كورى A هو نفسه مقلوب معامل التمدد الطولى للبلورة كما يأتى:

نفرض أن علاقة كلوزيوس وموزوتى تظل سارية المفعول فى المنطقة الباراكهربية

$$\therefore \quad \frac{K-1}{K+2} = \frac{N \cdot a}{3\varepsilon} = B\ N$$

حيث N هنا تساوى عدد وحدات الخلية فى وحدة الحجوم ، a تساوى الاستقطابية الكلية لوحدة الخلية ، ونفرض هنا أنها لا تتأثر بدرجة الحرارة .

$$B\frac{dN}{dT} = \left[\frac{1}{K+2} - \frac{K-1}{(K+2)^2}\right]\frac{dK}{dT}$$

$$= \frac{3}{(K+2)^2} \cdot \frac{dK}{dT}$$

وبقسمة طرفى المعادلة على B N نحصل على :

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dT} = \frac{3}{(K+2)^2}\frac{K+2}{(K-1)}\frac{dK}{dT}$$

$$= \frac{3}{(K+2)(K-1)} \cdot \frac{dK}{dT}$$

ولكن بما أن حجم وحدة الخلية هو مقلوب عدد الخلايا فى وحدة الحجوم

$$\therefore \quad V = \frac{1}{N}$$

$$\therefore \quad \frac{dN}{N} = -\frac{dV}{V}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{N}\left(\frac{dN}{dT}\right) = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right) = -3\propto$$

حيث $\propto$ هو معامل التمدد الطولى للمادة

وإذا اعتبرنا أن لثابت العازل قيما كبيرة أكبر كثيرا من الوحدة $K >> 1$ يمكن تقريب المقدار

$$(K+2)(K-1) \cong K^2$$

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dT} = -3\propto = \frac{3}{K^2}\frac{dK}{dT}$$

$$\therefore -\frac{1}{K^2}\, dK = \propto dT$$

$$\therefore d\left(\frac{1}{K}\right) = \propto dT$$

وبالتكامل نحصل على :

$$\frac{1}{K} = \propto (T - T_c)$$

أى أن :

$$K = A / (T - T_c)$$

حيث

$$A = \frac{1}{\propto}$$



ثابت العازل ودرجة حرارة كورى :

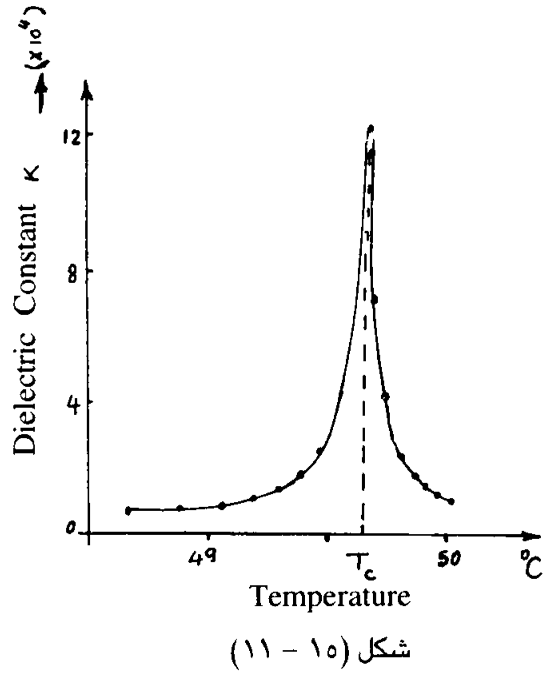
يصاحب التحول من حالة الفيروكهربية إلى الباراكهربية زيادة شاذة فى ثابت العازل للمادة .

نفرض أن المادة العازلة ليست لها خواص اتجاهية من ناحية العزل .

يكون مقدار ثابت العزل K مستنتجا من معادلة كلوزيوس – موزوتى هو :

$$K = \frac{1 + \frac{2}{3\varepsilon_0}\sum N_i\ a_i}{1 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\sum N_i\ a_i}$$

حيث N_i هو عدد الذرات من نوع i فى



شكل (١٥ – ١١)

تغير ثابت العازل لمادة كبريتات ثلاثى الجليسين

وحدة الحجوم والتى لها استقطابية a_i .

عندما تقترب $\Sigma\ N_i\ a_i\ =\ 3\ \varepsilon_0$ نجد أن قيمة ثابت العازل K تؤول إلى مالا نهاية بينما يظل الاستقطاب P قيمة محدودة عندما يكون المجال صفريا وتسمى هذه الحالة بكارثة الاستقطاب . حيث تقترب قيمة ثابت العازل من قيمة لا نهائية كما يظهر ذلك بوضوح لمادة كبريتات ثلاثى الجليسين Triglycene sulphate بالقرب من نقطة كورى . (انظر شكل ١٥-١١) .

وعند الاقتراب من درجة حرارة كورى يمكن كتابة المعادلة :

$$\frac{1}{3\,\varepsilon_0}\ \Sigma\ N_i\ a_i\ =\ 1 - \delta$$

حيث : $\delta << 1$

وبالتعويض فى المعادلة السابقة نحصل على :

$$K\ =\ 3 / \delta$$

وباعتبار أن قيمة δ تعتمد على درجة الحرارة وفقا للمعادلة :

$$\delta\ =\ \frac{C}{3}\ (\ T - T_c)$$

فإننا نحصل مباشرة على معادلة كورى فايس لتغير ثابت العازل مع درجة الحرارة على الصورة :

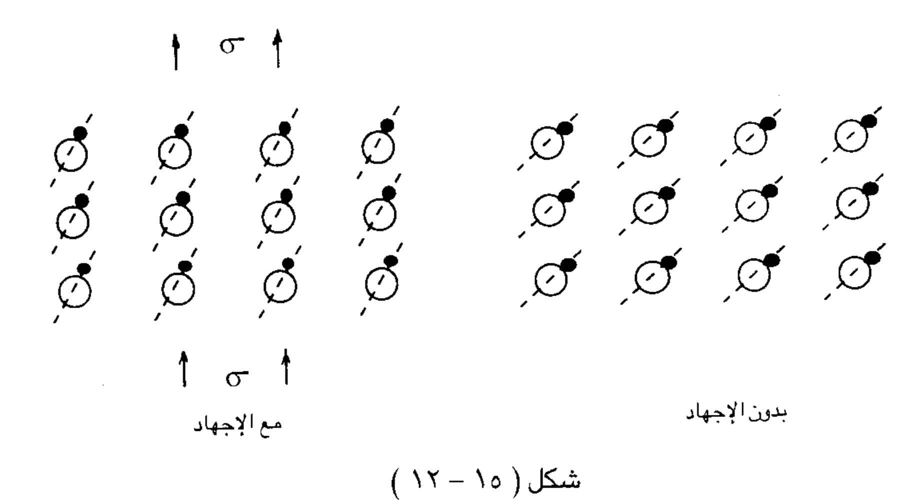
$$K\ =\ \frac{C}{T - T_c}$$

الظاهرة الكهرضغطية Piezo-electric effect :

عندما نؤثر على بلورة ما باجهاد ميكانيكى تزاح الذرات من أماكنها . فإذا كان للبلورة مركز تماثل شبيكى centro symmetric تكون الإزاحات متماثلة حول مراكز التماثل ، وبالتالى فإن توزيع الشحنات فى البلورة يظل دون تغيير يذكر ويظل عزم ثنائى القطب الكهربائى دون تغير .

هذا النوع من البلورات لا تظهر فيه الكهرضغطية .

أما إذا اعتبرنا بلورة ذات تركيب غير متماثل كما فى شكل (١٥ – ١٢) تترتب الأيونات على شكل أزواج تكون ثنائيات قطب .



شكل (١٥ – ١٢)

عندما نؤثر على هذه البلورة بإجهاد ميكانيكى يحدث تشويه يسبب الإزاحة النسبيه للأيونات بشكل غير متماثل ، وبذلك تتغير القيمة الكلية لعزم ثنائى القطب الكهربائى فى البلورة .

تسمى هذه الظاهرة بالكهرضغطية نسبة إلى حدوث استقطاب كهربائى ناشىء عن الإجهاد الميكانيكى ، ويلاحظ أن هذه الظاهرة انعكاسية أى أن تغيير استقطاب المادة . كهربائيا يحدث أيضا بداخلها انفعال ميكانيكى ، وتستخدم لذلك هذا المواد كمحولات للطاقة الكهربائية إلى ميكانيكية والعكس بالعكس .

ثابت الكهرضغطية η :

عندما نؤثر على مادة كهرضغطية بمجال كهربائى متردد E تحدث إزاحة كهربائية دورية ، وعادة تتخلف الإزاحة خلف المجال نتيجه لإختلاف فى الطور وتتوقف زاوية الطور

على تردد المجال المؤثر .

وتحدث حالة رنين عندما تكون الإزاحة والمجال متحدتان فى الطور تماما .

اعتبر مادة كهرضغطية موضوعة بين لوحى مكثف كهربائى ويمكن إحداث ضغوط طولية على المادة بإجهاد σ ينشأ عن ذلك انفعال e حيث :

$$e = \frac{\sigma}{Y}$$

حيث Y هو معامل المرونة ليونج

يحدث الإجهاد المؤثر استقطابا كثافته P يتناسب مع مقدار الإجهاد أى أن :

$$\therefore \ P = \eta \ \sigma$$

حيث η ثابت يسمى الثابت الكهرضغطى .

إذا أثرنا على سطحى المادة بمجال كهربائى E دون إحداث ضغوط ميكانيكية يكون الانفعال الحادث متناسبا مع شدة المجال

$$\therefore \ E = \eta \ E$$

أما إذا أثرنا فى وقت واحد بالإجهاد الميكانيكى والمجال الكهربائى تكون الإزاحة الكهربائية D هى :

$$D = \varepsilon \ E + \eta \sigma$$

ويلاحظ هنا إن الإزاحة الكهربائية عن المجال الكهربائى فقط هى :

$$D = \varepsilon E$$

يكون بذلك الانفعال الداخلى فى المادة هو :

$$e = \eta \ . \ E + \frac{\sigma}{Y}$$

وتعطى هذه العلاقة تغير المعاملات الميكانيكية بالمعاملات الكهربية فى ظاهرة الكهرضغطية electrostriction .

مسائل علي الباب الخامس عشر

١ – مكثف ذو لوحين متوازيين وضع نترات الصوديوم بينهما ثابت العازل $K = 5.2$.
إذا كانت مساحة لوحى المكثف هى : $0.10 \times 0.25\ m^2$ ووصل لجهد ثابت $250\ V$.
أوجد :

أ – سعة المكثف إذا كان البعد بين اللوحين $0.05\ m$.

ب – الشحنة على اللوحين .

جـ – عزم ثنائى القطب لوحدة الحجوم من العازل بين اللوحين .

د – شدة المجال الكهربى داخل العازل ؟

٢ – مكثف يتركب من كرتين متحدتى المركز نصفى قطريهما $3\ \&\ 4\ cm$. ملىء الفراغ بينهما بمادة الكبريت ($K = 4.0$) أوجد سعة المكثف ؟

٣ – أوجد عزم ثنائى القطب الكهربائى لجزىء من كلوريد الصوديوم ، اعتبر أن الجزىء يتركب من أيونى صوديوم وكلور يبعدان عن بعضهما مسافة $2.5\ ^{\circ}A$.

٤ – وضع غاز مثالى ثنائى القطبية فى مجال شدته $3 \times 10^{5}\ V\ m^{-1}$. إذا كان عزم ثنائى القطب لجزىء الغاز $10^{-19}\ C\ .\ m$.

احسب طاقة الموضع لثنائى القطب فى هذا المجال ، واثبت أن طاقة التهييج الحرارى kT عند درجة حرارة الغرفة تبلغ أكثر من ألف مرة قيمة هذه الطاقة .

٥ – احسب عزم ثنائى القطب لكل من مجاميع الشحنات التالية :

أ – شحنة $+ 1\ \mu C$ عند النقط $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، $(2,0)$.

وشحنة $1\ \mu C$ - عند النقط $(4,0)$ ، $(5,0)$ ، $(6,0)$. والإعداد بالمتر

ب – شحنات $+ 3\ \mu C$ عند $(0,0)$.

$+ 6\ \mu C$ عند $(1,1)$.

$- 3\ \mu C$ عند $(1,0)$.

$- 6\ \mu C$ عند $(0,1)$.

٦ – اذا كانت قيمة النفاذية النسبية للأرجون Permittivity عند درجة $0\ ^\circ C$ وضغط جوى واحد هى 1.000435 أوجد استقطابية ذرة الأرجون .

٧ – قضيب رفيع اسطوانى يتركب من ذرات استقطابيتها $10^{-40}\ f . m^2$. إذا كان بمادته عدد 5×10^{28} ذرة فى كل متر مكعب واثرنا عليه فى اتجاه طوله بمجال كهربائى. أوجد النسبة بين المجال المحلى إلى المجال الخارجى المؤثر .

٨ – أوجد سمك بلورة من الكوارتز لكى يكون لها تردد رنينى يساوى :

$10\ M\ c/s\ ;\ 1\ M\ c/s\ ;\ 10\ K\ c/s$ علما بأن تردد الرنين للكوارتز

$$f_0 = \frac{1}{2\,b} \sqrt{E/\rho}$$

حيث b ثابت يحدد الاهتزاز الكهرضغطى فى الكوارتز ،

E معامل يونج للمرونة للكوارتز ويساوى $10^{10}\ n\ m^{-2}$

ρ كثافة الكوارتز وتساوى $2500\ kg\ m^{-3}$.

الباب السادس عشر

ديناميكية الشبيكة Lattice Dynamics :

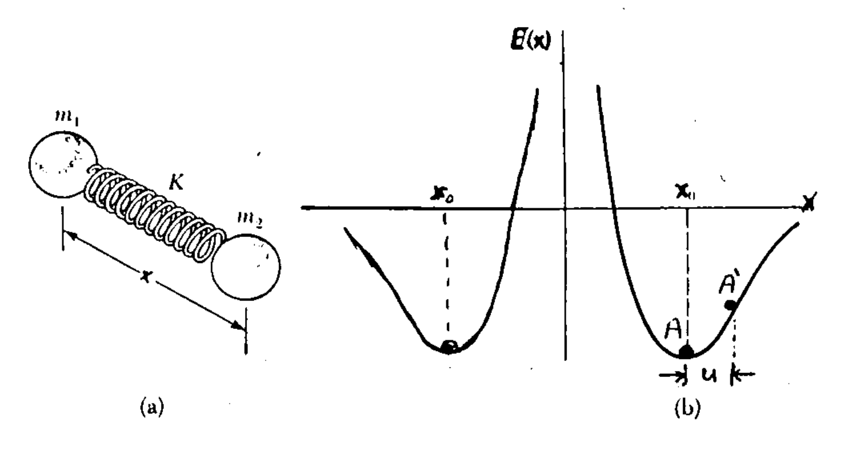
عند درجة الصفر المطلق تستقر الذرات فى أية شبيكة فى مواضع الاتزان فى حالة سكون ولكن رفع درجة الحرارة يسبب تذبذب هذه الذرات حول مواضع الاتزان بسعة حركة تتوقف على درجة الحرارة وقد تصل مقدار هذه السعة إلى ١٠ ٪ من المسافة بين الذرات المتجاورة عندما تصبح درجة الحرارة مرتفعة .

التردد الذرى Atomic frequency of vibration :

اعتبر شبيكة بلورية يكون لكل ذرة فيها عدد Z جار قريب ، شكل (١٦ – ١) . coordination number نفرض أن $E(x_0)$ تمثل طاقة الموضع للذرة عند وضع الاتزان x_0 نفرض أن التغير فى طاقة الذرة A عند إزاحتها إلى الوضع A^1 هو : E وأن الإزاحة بين الوضعين هى : u

$$\therefore\ \Delta E = \frac{2}{z}\left[\left\{E(x_0+u)-E(x_0)\right\}-\left\{E(x_0)-E(x_0-u)\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{z}\left[E(x_0+u)+E(x_0-u)-2E(x_0)\right]$$



شكل ١٦ – ١

يلاحظ أننا قسمنا المعادلة على Z عدد الجيران وذلك للحصول على التغير فى الطاقة لكل ذرة كما أننا ضربنا المقدار فى ٢ وذلك لأن حركة أية ذرة بالنسبة لأخرى تجاورها يسبب زيادة فى طاقة الموضع بنفس المقدار لكل من الذرتين .

نفك المقدارين $E(x+u)$ & $E(x-u)$ بمفكوك تيلور

$$\therefore E(x_0+u) = E(x_0) + \frac{\partial E}{\partial x} \cdot u + 1/2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \cdot u^2 + \dots$$

$$E(x_0-u) = E(x_0) - \frac{\partial E}{\partial x} \cdot u + 1/2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \cdot u^2 - \dots$$

$$-2E(x_0) = -2E(x_0)$$

بالجمع نحصل على :

$$E(E x_0+u) + E(x_0-u) - 2E(x_0) = \frac{\partial^2 E}{\partial X^2} \cdot u^2$$

$$\therefore \Delta E = \frac{2}{z} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} u^2 = 1/2 \propto u^2$$

حيث

$$\propto = \frac{4}{z} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

أى أن التغير فى الطاقة يتناسب طرديا مع مربع الإزاحة u وتكون القوة المؤثرة على كل ذرة بدلالة الإزاحة هى :

$$F = -\frac{d}{du}(\Delta E) = -\propto u$$

وتكون بذلك المعادلة التفاضلية للحركة :

$$m \frac{d^2 u}{d t^2} = -\propto . u$$

حيث : m هى الكتلة الذرية

حل المعادلة السابقة ، وهى على شكل حركة توافقية بسيطة ، هو :

$$u = A \cos \omega t$$

حيث :

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

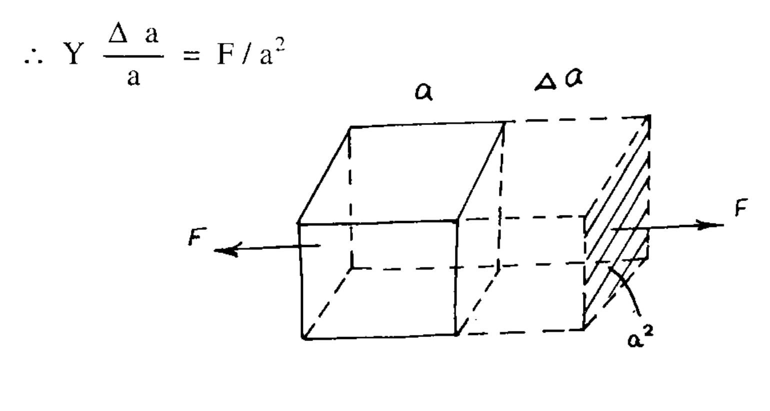
وبذلك يكون التردد الذرى هو :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

حيث α هو ثابت القوة أى القوة التى تحدث وحدة الإزاحة ، ويمكن تقديره عمليا بالاستعانة بنظرية المرونة .

فإذا أثرنا بقوة F على مكعب من المادة طول ضلعه الوحدة شكل (١٦ - ٢) تكون α هى القوة اللازمة لكى تحدث أستطالة فى المكعب مقدارها الوحدة وذلك بافتراض صحة قانون هوك .

$$\therefore\ Y \frac{\Delta a}{a} = F / a^2$$



شكل (١٦ - ٢)

حيث Y هو معامل يونج للمرونة .

وباعتبار أن كلا من a , Δa يساويان الوحدة تكون $Y = F = \alpha$

أى أن ثابت القوة α يكون فى حدود القيمة ٢٥ نيوتن / متر وإذا اعتبرنا مادة مثل : النحاس تكون كتلة الذرة الواحدة فيه هى : حوالى 10^{-25} كيلو جرام وبالتعويض فى مادة

التردد نحصل على :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25}{10^{-25}}} = 10^{13} \ / \ c/s$$ تقريبا

ومن الواضح أننا إذا اعتبرنا جميع الحركات الممكنة للذرات المختلفة فإننا نجد ضرورة وجود ترددات أخرى كثيرة .

النظرية الكلاسيكية للحرارة الذرية :

Classical theory of specific heats of solids :

وجد ديولنج ويتى قديما بالتجربة أن حاصل ضرب الوزن الذرى مضروبا فى الحرارة النوعية يكون مقدار ثابتا لمواد كثيرة ، ويساوى تقريبا العدد ٦ . وقد أوحت تلك المشاهدات أن ذرات المواد المختلفة لها نفس السعة الحرارة ، وأن الحرارة تختزن داخل المادة على شكل طاقة حركة داخلية .

استندت النظرية الكلاسيكية على قانون تساوى توزيع الطاقة Law of equipartition of energy لتفسير ثبوت الحرارة الذرية للمواد وينص هذا القانون على أن طاقة المتذبذب لكل درجة من درجات الحرية هى 1/2 kT .

فى حالة المواد الصلبة يكون لكل ذرة طاقة حركة وطاقة موضع ، ولذلك فالطاقة المتوسطة للمتذبذب تكون kT .

يمكن الوصول لهذه النتيجة رياضيا باعتبار طاقة المهتز التوافقى

$$E = p^2/2m + 1/2 \ m\omega^2 \ u^2$$

حيث ω هى السرعة الزاوية ، p هى كمية الحركة ، u هى الإزاحة من وضع الاتزان .

الحد الأول فى المعادلة : يمثل طاقة الحركة والحد الثانى يمثل طاقة الموضع .

بتطبيق الميكانيكا الاحصائية الكلاسيكية تكون الطاقة المتوسطة للمهتز هى .

$$\overline{E} = \int_0^\infty E \ e^{-E/kT} \ dE \ \Big/ \ \int_0^\infty e^{-E/kT} \ dE$$
$$= kT$$

حيث k هو ثابت بولتزمان

T درجة الحرارة المطلقة .

اعتبر ١ جم ذرى من المادة يحتوى على عدد افوجادرو N ذرات . الطاقة الداخلية للمجموعة هى :

$$U = N \times 3\,kT$$

الحرارة الذرية هى :

$$C_v = \frac{\delta U}{\delta T} = 3\,Nk = 3\,R = 6$$

حيث R هو ثابت الغاز ويساوى Nk

يكون هذا القانون صحيحا فى درجات الحرارة المرتفعة فقط وقد وجد أن الحرارة الذرية للمواد تنقص تدريجيا وتؤول إلى الصفر عند الصفر المطلق . هذه الحقيقة العملية تجعل النظرية الكلاسيكية غير قادرة على تفسير نقص C_v مع T .

ولا يمكن أن يفسر هذا النقص باختفاء درجات من الحرية للمهتز التوافقى الذرى إذ أن ذلك يستلزم أن يكون النقص فى C_v نقصا سلميا وليس متصلا كما أننا لا يمكننا افتراض وجود كسور من درجات الحرية . fractional degrees of freedom .

نظرية أينشتين للحرارة الذرية Einstein's theory :

فسر أينشتين فشل النظرية الكلاسيكية للحرارة الذرية بسبب اعتبار أن الطاقة المتوسطة للمهتز هى k T لكل درجة من درجات الحرية . أدخل بدلا من ذلك نظرية بلانك الكمية التى تنص على أن أى مهتز يبعث أو يمتص الطاقة على شكل كمى h f حيث h هو ثابت بلانك و f هو تردد المهتز .

الطاقة المتوسطة الكمية للمهتز التوافقى :

اعتبر مجموعة من المتذبذبات التوافقية تكون مجموعة ما عددها N نفرض أن N_0 هو

عدد المتذبذبات ذات الطاقة صفر. بتطبيق إحصاء بولتزمان يكون عدد المتذبذبات ذات الطاقة ε هو :

$$N_0 \; e^{-\varepsilon / kT}$$

ويكون العدد الكلى للمتذبذات ذات الطاقة $h f$ ، $2 hf$ ، $3 h f$ ... هو :

$$N = N_0 + N_0 \; e^{-hf/kT} + N_0 \; e^{-2 hf/kT} + \ldots\ldots$$

$$= N_0 \; (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \ldots.)$$

حيث $x = hf / kT$

مجموع هذه المتسلسلة هو :

$$(1 - e^{-x})^{-1}$$

$$N = \frac{N_0}{(1 - e^{-x})}$$

ولإيجاد الطاقة نضرب عدد المهتزات فى طاقة كل منها ثم نجمع :

$$\therefore \; E = 0 \,.\, N_0 + hf\, N_0\, e^{-x} + 2 \; hf \; N_0\, e^{-2x} + \ldots$$

$$= hf \; N_0\, e^{-x} \, (1 + 2\, e^{-x} + 3\, e^{-2x} + \ldots.)$$

$$= h\, f\, N_0\, e^{-x} \; (1 - e^{-x})^{-2}$$

وبالتعويض بدلا من N_0 نحصل على :

$$E = N \; h\, f \; \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{N\, h\, f}{(e^{x} - 1)}$$

أى أن الطاقة المتوسطة الكمية للمهتز التوافقى الواحد هى :

$$\frac{h\, f}{e^{hf/kT} - 1}$$

اعتبر أينشتين أن ذرات المادة هى متذبذبات توافقية تردد كل منها f وأن جميع التذبذبات لها نفس التردد .

$$U = 3\, N \, \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} = 3\, N\, k\, T \, \frac{x}{e^{x} - 1}$$

بمفاضلة U بالنسبة إلى T نحصل على الحرارة الذرية

$$C_v = \frac{dU}{dT} = 3R\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = 3RE(x)$$

$$= 3RE\left(\frac{\theta}{T}\right)$$

حيث $E(x)$ هى دالة أينشتين، $\theta = \frac{hf}{k}$ هى درجة الحرارة المميزة للمادة characteristic temperature .

بفحص دالة أينشتين رياضيا عند الدرجات الصغيرة جدا والكبيرة جدا نجد الآتى :

$$\text{Lim}_{T\to 0} E\left(\frac{\theta}{T}\right) \longrightarrow 0$$

$$\text{Lim}_{T\to\infty} E\left(\frac{\theta}{T}\right) \longrightarrow 1$$

$E(x)$ تؤول إلى الصفر عند درجة الصفر المطلق وتؤول إلى الواحد الصحيح عند الدرجات المرتفعة ، أى أن الحرارة الذرية C_v عند الدرجات المرتفعة تساوى $3R$ وهذا يتفق مع نتائج النظرية الكلاسيكية بينما عند الدرجات المنخفضة تقل C_v تدريجيا حتى تؤول إلى الصفر عند درجة الصفر المطلق .

وبالرغم من أن نظرية أينشتين قد فسرت نقص C_v مع درجة الحرارة إلا أن قيم C_v التى أعطتها النظرية كانت عادة أقل كثيرا جدا مما أعطته التجربة .

ولذلك لم يكن نجاح النظرية كاملا ، وقد ظهر فيما بعد أن سبب هذا الاختلاف هو افتراض أن جميع الذرات تهتز بتردد واحد فقط .

نظرية الفونونات لديباى Debye's phonon theory :

افترض ديباى أن الذبذبات الذرية فى المادة تكون طيف ترددات له قيمة معينة لا يزيد عنها cut - off frequency وتتوقف على تركيب الشبيكه لهذه المادة .

وسمى كل موجه mode of vibration فونون phonon وقد اعتبر أن الحركة الذرية في داخل المادة تأخذ شكلا موجيا وذلك بالنسبة لوجود قوى بينية كبيرة بين الذرات ، ولا يعقل أن تتحرك كل ذرة حركة فردية دون ارتباط بالذرات المحيطة بها ، فقد صور ديباى الحركة الذرية على أنها موجات أو فونونات لها ترددات تتراوح بين الصفر وقيمة عظمى لا تتعداها Cut - off frequency .

طيف الترددات لديباى :

أثبت ديباى أن دالة الترددات بالنسبة للفونونات $N(\upsilon)$ frequency distribution function تتناسب طرديا مع مربع التردد أى مع υ^2 وذلك كما يأتى :

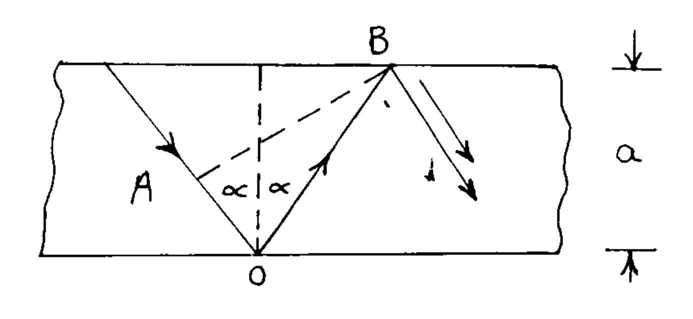
اعتبر كتلة من المادة على شكل متوازى مستطيلات أبعاده هى :

a , b , c

نفرض موجة صوتية (فونون) طول موجتها λ تنتقل فى المادة فى الاتجاه AO فى شكل (١٦ - ٣) تنعكس على السطح الحر عند O ثم مرة أخرى عند B .

إذا تطابقت موجة ساقطة مع مثيلتها التى انعكست مرتين وكانا فى اتجاه واحد نجد أنهما يتحركان فى نفس الطور إذا كان فرق المسار عدد صحيح من طول الموجة أى أن

$$OA + OB = n\lambda$$



(شكل ١٦ - ٣)

لكن :

$$OB = \frac{a}{\cos \propto}$$

$$OA = OB \cos 2\propto$$

$$\therefore OA + OB = a\left(\frac{1+\cos 2\propto}{\cos \propto}\right)$$

$$\therefore n\lambda = 2a\cos\propto$$

$$\therefore a\cos\propto = \frac{n\lambda}{2}$$

وبتعميم هذه النتيجة فى اتجاهات الفراغ الثلاثة نحصل على :

$$a\cos\propto^1 = n_1\lambda/2$$

$$b\cos\propto^2 = n_2\lambda/2$$

$$c\cos\propto^3 = n_3\lambda/2$$

حيث $\propto^3$ ، $\propto^2$ ، $\propto^1$ هى الزوايا التى تصنعها أحرف متوازى المستطيلات a b c مع الاتجاه الموجى .

بالتربيع والجمع نحصل على :

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{n_1^2}{4a^2} + \frac{n_1^2}{4b^2} + \frac{n_3^2}{4c^2}$$

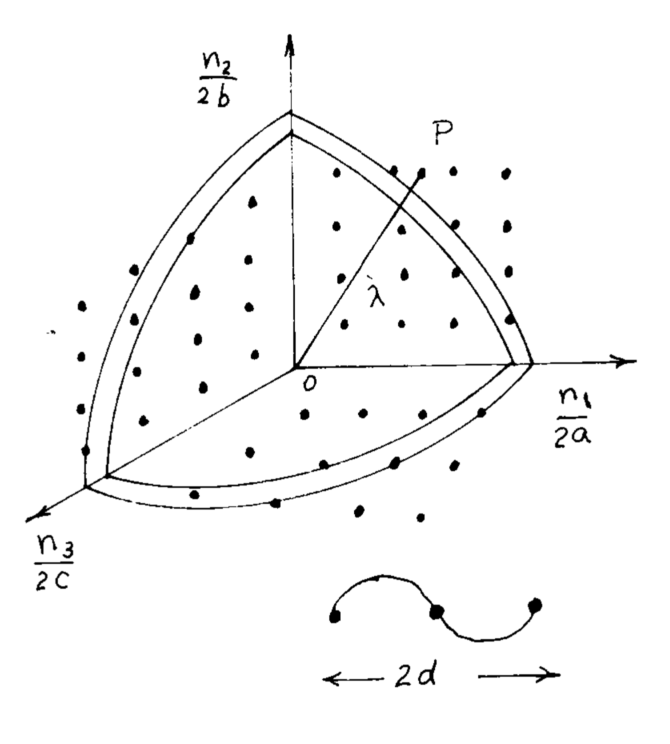
حيث أن مجموع مربعات جيوب تمام الزوايا $\propto^1$ ، $\propto^2$ ، $\propto^3$ تساوى واحد .

إذا رسمنا فراغ العدد الموجى space - $\frac{1}{\lambda}$ وهو الفراغ الذى تكون إحداثياته المتعامدة هى : $\frac{n_1}{2a}$ $\frac{n_2}{2b}$ $\frac{n_3}{2c}$.

تمثل أى نقطة فى هذا الفراغ موجه ذات طول موجى معين λ انظر شكل (١٦ - ٤)

ويطلق اسم فونون على مثل هذه الموجة phononالتى يتحدد طولها بالإعداد n_1 n_2 n_3

وهى التى تحدد بعد النقطة P عن مركز الإحداثيات $\left(OP = \frac{1}{\lambda} \right)$ تكون أبعد نقطة فى هذا الفراغ عن المركز O هى التى لها أصغر طول موجى λ_{min} ويحدد هذا الطول التركيب البلورى وأبعاد وحدة الخلية فى المادة .



شكل (١٦ - ٤)

فإذا كان d هو البعد بين ذرتين متجاورتن في اتجاه معين تكون أقل طول موجة يمكن لها أن تنتشر فى هذا الاتجاه هى : $\lambda_{min} = 2d$

ويكون بذلك حدود فراغ العدد الموجى $\left(\frac{1}{\lambda} \text{ - space} \right)$ فى هذا الاتجـاه هو $\frac{1}{\lambda_{min}}$

. ويطلق على مثل هذه الحدود فى فراغ العدد الموجى بمنطقه بريلوين Brillouin zone وتعرف بأنها تلك المنطقة داخل فراغ العدد الموجى التى تحتوى بداخلها على جميع الفونونات الطبيعية بداخل البلورة .

علاقة ماديلنج Madelung relation :

إذا فرضنا أن منطقة بريلوين عبارة عن كرة مركزها O ونصف قطرها $\frac{1}{\lambda_{min}}$ يكون

العدد الكلى للفونونات داخل البلورة هو :

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\lambda_m}\right)^3 / \frac{1}{2a} \; \frac{1}{2b} \; \frac{1}{2c}$$

حيث حجم الخلية فى فراغ $\frac{1}{\lambda}$ يساوى $\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{2c}$

وقد ضربنا فى $\frac{1}{8}$ لأننا نعتبر فقط الثمن الموجب من فراغ $\frac{1}{\lambda}$ وذلك منعا لتكرار قيم

λ حيث أن هناك فى فراغ $\frac{1}{\lambda}$ ثمانية نقط تمثل نفس الفونون . مثلا :

(n_1 , n_2 , n_3) ، $(- n_1 , n_2 , n_3)$ وهكذا .

وبما أن حجم البلورة أصلا هو a b c فإن عدد الفونونات لوحدة الحجوم من البلورة

هو :

$$N = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\lambda_m}\right)^3 / \text{c.c.}$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda_m} = \left(\frac{3N}{4\pi}\right)^{1/3}$$

ولكن سرعة الصوت فى المادة

$$C_0 = \lambda_{min} \upsilon_{max}$$
$$= \sqrt{G / \rho}$$

حيث G هو معامل الصلابة ، ρ هى كثافة المادة وتساوى N m لأن N هو عدد

المهتزات لوحدة الحجوم ، m هى الكتلة الذرية

$$\therefore \upsilon_{max} = \frac{C_0}{\lambda_{min}} = C_0 \left(\frac{3N}{4\pi}\right)^{1/3}$$

$$= G^{1/2} \rho^{-1/2} \left(\frac{3\rho}{4\pi m} \right)^{1/3}$$

$$\therefore \upsilon_{max} = \text{const. } G^{1/2} \rho^{-1/6} m^{-1/3}$$

وتعطى هذه المعادلة قيمة أكبر تردد للفونونات داخل البلورة أو بمعنى أخر حدود طيف الترددات الداخلية .

وقد تمكن ماديلنج من استنتاج هذه العلاقة عمليا قبل أن تتبلور النظرية على الشكل السابق وهذا الاتفاق بين التجربة والنظرية يحقق صحة النظرية .

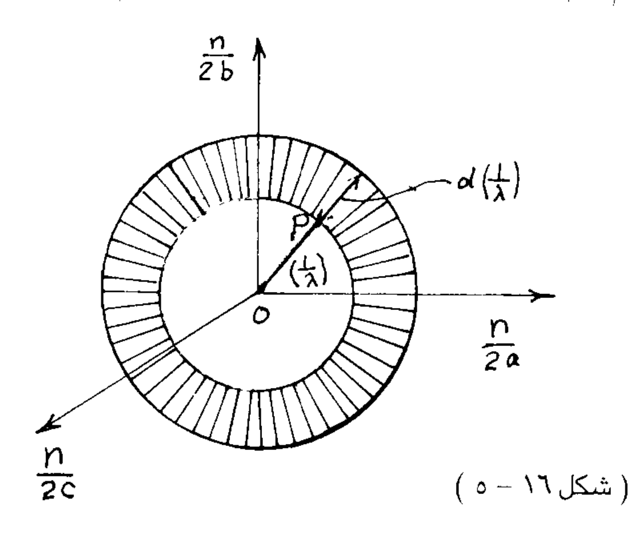
ويلاحظ أن ماديلنج كان يوجد قيم m ، ρ ، G بالطرق المعتادة وكان يحسب υ_{max} عن طريق قياس تغير C_v / T عند درجات الحرارة المنخفضة وكذلك من معاملات المرونة .

دالة طيف التردد لديباى :

لإيجاد دالة توزيع التردد $N(\upsilon)$ للفونونات بدلالة التردد υ نعتبر قشرة رقيقة فى فراغ $1/\lambda$ مركزها O نصف قطرها $\frac{1}{\lambda}$ وسمكها $d\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ، شكل (١٦ – ٥) .

عدد الفونونات داخل القشرة تساوى

$$\frac{1}{8} \cdot 4\pi \left(\frac{1}{\lambda^2}\right) d\left(\frac{1}{\lambda}\right) / \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{2c} = \frac{4}{\lambda^2} d\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot abc$$



(شكل ١٦ – ٥)

وبالقسمة على حجم البلورة a b c نحصل على عدد الفونونات من هذه القشرة لكل وحدة حجوم من البلورة وهذا يساوى :

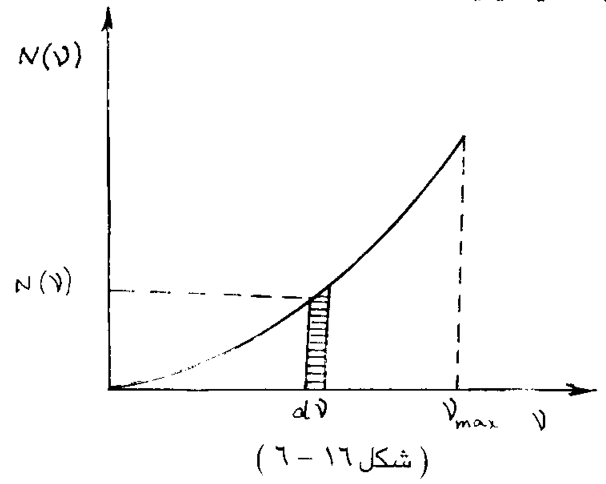
$$\frac{4\pi \upsilon^2 \, d\upsilon}{C_0^3} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \, d\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\therefore \; N(\upsilon) \, d\upsilon = \frac{4\pi \upsilon^2}{C_0^3} \, d\upsilon$$

« وقد استعملنا هنا المعادلة $C_0 = \lambda \, . \, \upsilon$ وتفاضلها لإيجاد $d\lambda$, $d\upsilon$ » المعادلة السابقة تعطى $N(\upsilon) \propto \upsilon^2$ أى أنها دالة قطع مكافىء يكون لها حدا لأقصى تردد cut - off frequency : (υ_{max}) كما فى شكل (١٦ – ٦) .

نظرية ديباى لحساب الحرارة الذرية C_v :

تنتشر الاهتزازات الميكانيكية داخل أى مادة صلبة على شكل نوعين من الأمواج :



(شكل ١٦ – ٦)

١ – أمواج مستعرضة سرعتها $C_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ حيث G هى معامل الصلابة ، ρ كثافة المادة ويمكن اعتبار الموجة المستعرضة على أنها موجتين مستقطبتين فى اتجاهين متعامدين (مثل الأمواج الكهرومغنطيسية) .

٢ - أمواج طولية سرعتها $C_l = \sqrt{(B + 4/3\ G)/\rho}$ حيث B معامل المرونة الحجمى .

عدد الأمواج ، مستعرضة وطولية ، والتى لها ترددات تقع بين υ , $\upsilon + d\upsilon$ هى :

$$N(\upsilon)\ d\upsilon = 4\pi\upsilon^2 \left(\frac{2}{C_t^3} + \frac{1}{C_l^3}\right) d\upsilon$$

وقد ضربنا $\frac{1}{ct^3}$ فى 2 ، حيث أن الموجة المستعرضة تعتبر اثنتين مستقطبتين .

العدد الكلى للأمواج أو الفونونات فى وحدة الحجوم من المادة هو :

$$\int 4\pi\upsilon^2 \left(\frac{2}{Ct^3} + \frac{1}{C_l^3}\right) \upsilon^2 .\ d\upsilon$$

. ولابد أن يساوى هذا العدد 3 N أى يساوى العدد الكلاسيكى لدرجات الحرية ، ومن الواجب أن يكون حد التكامل الأعلى υ_m محدودا إذ أن عدد درجات الحرية أيضا محدودا .

إذا اعتبرنا ١ جم جزىء تكون N هى عدد أفوجادرو وبإجراء التكامل السابق نحصل على :

$$\upsilon_m^3 = \frac{9N}{4\pi\left(\frac{2}{C_t^3} + \frac{1}{C_l^3}\right)}$$

وتعطى هذه المعادلة قيمة أقصى تردد υ_m فى طيف الترددات .

لإيجاد الطاقة الداخلية للجرام جزىء من المادة نضرب عدد الفونونات فى الطاقة الكمية quantized energy للمهتز التوافقى

$$\therefore\ U = 4\pi\left(\frac{2}{Ct^3} + \frac{1}{C_l^3}\right)\int_0^{\upsilon_m} \frac{h\upsilon^3\ d\upsilon}{\left(e^{h\upsilon/kT} - 1\right)}$$

$$= \frac{9N}{\upsilon_m^3}\int_0^{\upsilon_m} \frac{h\upsilon^3\ d\upsilon}{\left(e^{h\upsilon/kT} - 1\right)}$$

وبمفاضلة الطاقة الداخلية U بالنسبة لدرجة الحرارة T نحصل على الحرارة الذرية C_v .

$$C_v = \frac{9N}{\upsilon^3}\int_0^{\upsilon_m} \frac{\frac{h^2\upsilon^4}{kT^2} \cdot e^{h\upsilon/kT} \cdot d\upsilon}{\left(e^{h\upsilon/kT} - 1\right)^2}$$

وبوضع $\zeta = \frac{h\upsilon}{kT}$ ، $x = \frac{h\upsilon_m}{kT}$ نحصل على $d\zeta = \frac{h\,d\upsilon}{kT}$

$$\therefore\ C_v = \frac{9Nk}{x^3}\int_0^x \frac{\zeta^4 e^\zeta\, d\zeta}{\left(e^\zeta - 1\right)^2}$$

وبإجراء التكامل بالتجزئة

مع وضع $Nk = R$ حيث R هو ثابت الغاز للجرام الجزيئى

$$\therefore\ C_v = -\frac{9R}{x^3}\int_0^x \zeta^4\, d\left(\frac{1}{e^\zeta - 1}\right)$$

$$= \frac{9N}{x^3}\left(\int \frac{1}{e^\zeta - 1}\, d\zeta^4 - \left|\frac{\zeta^4}{e-1}\right|_0^x\right)$$

$$= \frac{9R}{x^3}\left(\int_0^x \frac{4\zeta^3\, d\zeta}{\left(e^\zeta - 1\right)} - \frac{x^4}{e^x - 1}\right)$$

$$= 3R\left(\frac{12}{x^3}\int \frac{\zeta^3\, d\zeta}{e^\zeta - 1} - \frac{3x}{e^x - 1}\right)$$

$$= 3\,R\,D\,(x)$$

$$= 3\,R\,D\left(\frac{\theta}{T}\right)$$

حيث $D\,(x)$ هى دالة ديباى .

وباعتبار حالات الحدود نجد أن عند درجات الحرارة المرتفعة تكون قيم كل من x ، ζ صغيرة جدا ، وتؤول قيمة دالة ديباى عندئذ إلى الواحد الصحيح .

وهذا يعنى أن $C_v = 3R$ عند الدرجات المرتفعة أى أن النظرية الكلاسيكية تنطبق

مع نظرية ديباى عند الدرجات المرتفعة .

أما عند درجات الحرارة المنخفضة تكون قيم x ، ζ كبيرة جدا وتؤول قيمة دالة ديباى إلى الصفر .

حيث أن تغير المقام فى الدالة يكون بازدياد أكبر كثير من البسط لأنه يتبع لدالة أسية.

قانون ديباى T^3 عند الدرجات المنخفضة :

يمكن تقريب معادلة الحرارة الذرية لديباى عند الدرجات المنخفضة كما يأتى :

١ – نهمل الحد الثانى فى دالة ديباى إذ أن × تؤول إلى مالا نهاية عند الدرجات المنخفضة جدا (عند الصفر المطلق) ويؤول الكسر .

$\left(\frac{3x}{e^x - 1}\right)$ إلى الصفر إذ أن e^x تزداد زيادة كبيرة بالنسبة إلى x

٢ – يمكن إثبات رياضيا أن :

$$\operatorname{Lim}_{x \longrightarrow \infty} \int_0^x \frac{\zeta^3 \, d\zeta}{e^\zeta - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

وبالتعويض فى معادلة ديباى نحصل على الحرارة الذرية عند الدرجات المنخفضة .

$$C_v = 3R\left(\frac{12}{x^3} \cdot \frac{\pi^4}{15}\right)$$

وبما أن $x = \frac{\theta}{T}$ حيث θ هى درجة حرارة ديباى المميزة .

$$\therefore \; C_v = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(T/\theta\right)^3$$

$$\therefore \; C_v = \frac{12 \pi^4 R T^3}{5 \theta^3}$$

أى أن الحرارة الذرية تتناسب مع مكعب درجة الحرارة المطلقة (T صغيرة) وتساوى

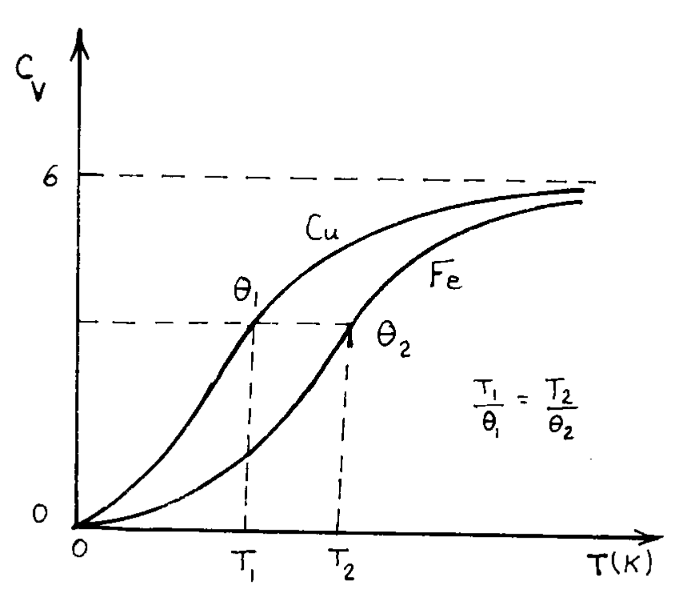
درجة حرارة ديباى $\frac{h\upsilon_m}{k} = \theta$ وهى تتوقف على المادة .

وقد وجد أن التقريب السابق يكون صحيحا فى حدود ١٪ عندما تكون $x > 12$ أى عندما تكون درجة الحرارة $\left(T < \frac{\theta}{12} \right)$ أقل من $\frac{١}{١٢}$ من درجة ديباى المميزة .

نقد نظرية ديباى :

١ – وجد بحساب دالة ديباى عند درجات الحرارة المختلفة أن هناك تطابقا بين النتائج النظرية والنتائج التجريبية لعدد كبير من المواد البسيطة وهذا يدعم صحة النظرية .

٢ – بمعرفة درجات الحرارة المميزة لديباى لمواد مختلفة يمكن استنتاج منحنى C_v / T لأى مادة دون قياس وذلك بمعرفة هذا المنحنى لأى مادة أخرى يسهل القياس عليها شكل (١٦ – ٧) . إذ أن درجتى الحرارة T_1 , T_2 التى تتساوى عندهما قيمة الحرارة الذرية C_v لمادتين مختلفتين ترتبط



شكل (١٦ – ٧)

بدرجات دیبای المميزة لهما θ_1 ، θ_2 بالمعادلة

$$\frac{T_1}{\theta_1} = \frac{T_2}{\theta_2}$$

٣ – من أخطاء النظرية أنها تفترض وجود نوع واحد من اختزان الطاقة داخل المادة على شكل طاقة حركة تذبذبية للذرات المكونة لها ، ولكن تحدث حالات شاذة وانحراف عن صحة النظرية عند ادخال الطرق الأخرى الممكنة التي تختزن بواسطتها الطاقة مثل :

أ – يمكن أن يكون لجزيئات المادة درجة حرية دورانية .

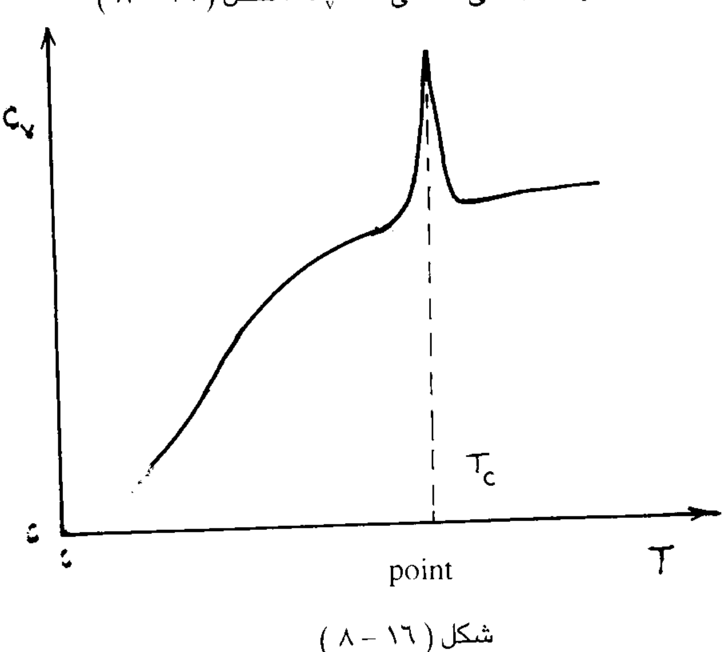
Rotational degree of freedom .

ب – يمكن للطاقة أن تختزن فى حركة الإلكترونات .

جـ – تتغير الطاقة عند حدوث تحول داخل المادة وتظهر حينئذ .

phase transformation .

ما يسمى بنطقة λ (λ - point) على منحنى C_v / T . شكل (١٦ – ٨)



شكل (١٦ – ٨)

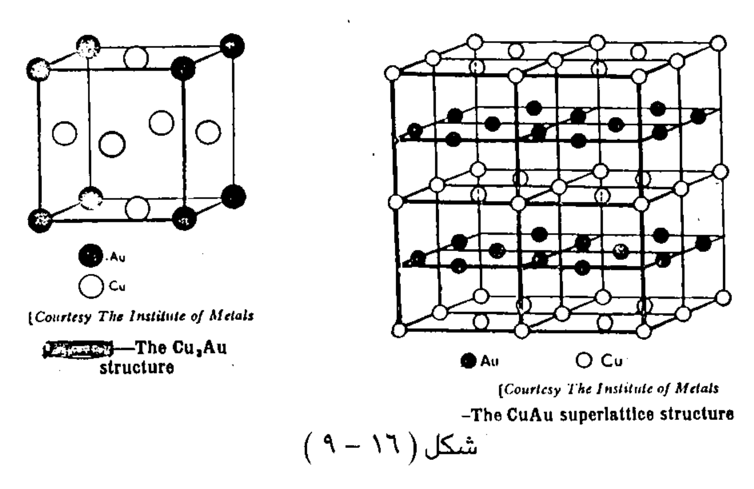
ومثال آخر : فى حالة بعض السبائك مثل Cu Au ، Cu_3 Au والتى قد يحدث لذراتها ترتيب يعقبه عدم ترتيب order-disorder هنا أيضا يلزم مقدار من الطاقة لتحويل

الشبيكة من الحالة المرتبة الى الحالة الغير مرتبة .

وشكل (١٦ - ٩) يبين ترتيب الذرات فى الشبيكتين فى الحالة المنتظمة ordered.

نفرض مثلا أن هناك طورين من أطوار المادة A & B حيث يكون A أكثر استقرارا عند درجات الحرارة الأقل من T_c بينما يكون B مستقرا أعلى من T_c

SUPERLATTICE STRUCTURES IN ALLOYS



[Courtesy The Institute of Metals
—The Cu_3Au structure

[Courtesy The Institute of Metals
–The CuAu superlattice structure

شكل (١٦ - ٩)

لتوضيح ذلك نفرض بلورة حرارتها الذرية C_p سخنت تحت ضغط فارتفعت درجة حرارتها بمقدار d T . من قوانين الديناميكا الحرارية

التغير في الطاقة الحرة dF Free energy

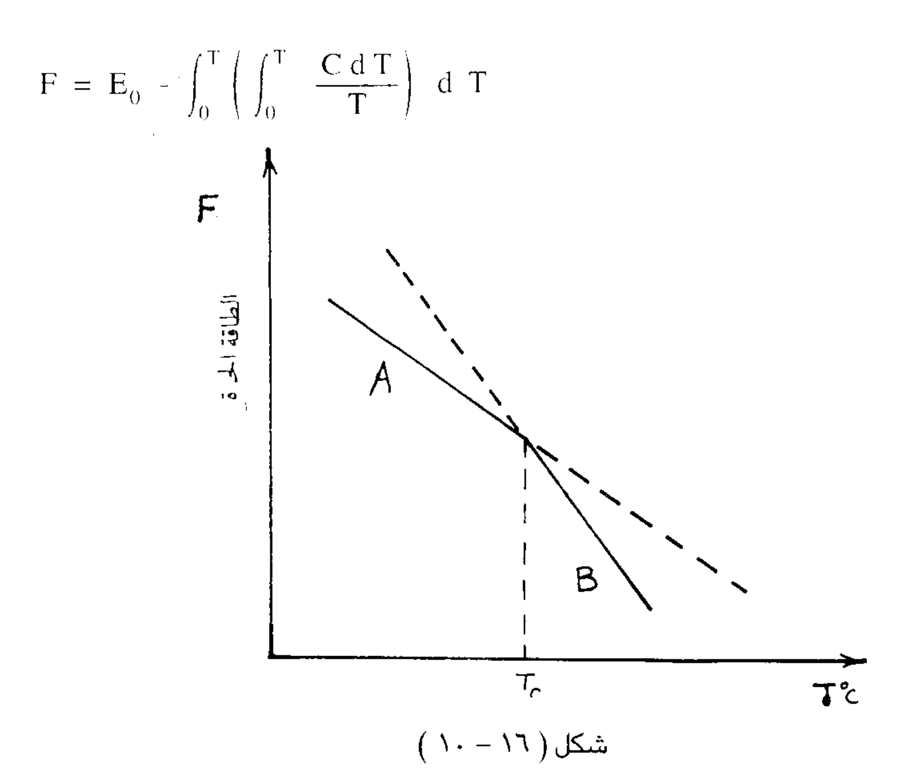
$$dF = d(U - TS)$$
$$= dU - TdS - S\,dT$$
$$= p\,dV - S\,dT$$

التغير فى الحجم dV فى حالة الأجسام الصلبة يكون عادة صغيرا ولذلك يمكن إهمال الحد p d V

$$\therefore\ dF = -S\,dT$$

إذا كانت قيمة الطاقة الحرة عند درجة الصفر المطلق هى F_0 والطاقة الداخلية هى E_0 فإن تكامل المعادلة السابقة يعطى :

$$F = E_0 - \int_0^T \left(\int_0^T \frac{C\, dT}{T} \right) dT$$



شكل (١٦ - ١٠)

وقد عوضنا هنا بدلا من d S بالمقدار $\frac{dQ}{T}$ أى $\frac{cdT}{T}$ والمعادلة السابقة تبين حدوث نقص فى الطاقة الحرة عند رفع درجة الحرارة ويكون النقص كبيرا كلما زادت قيمة الحرارة الذرية C_p ، شكل (١٦ - ١٠) .

وتبعا لقاعدة أقل طاقة حرة Minimum free energy condition « الوضع المستقر هو الذى يكون فيه الطاقة الحرة أقل ما يمكن » لذلك نجد أنه عندما نرتفع بدرجة الحرارة عن T_c يصبح طور المادة B هو الأكثر استقرارا فتتحول إليه جميع المادة من الطور A ويصاحب هذا التحول امتصاص كمية من الطاقة هى التى تظهر على منحنى T / C_v على شكل λ - point .

اهتزاز الشبيكة وامتصاص البلورات للضوء

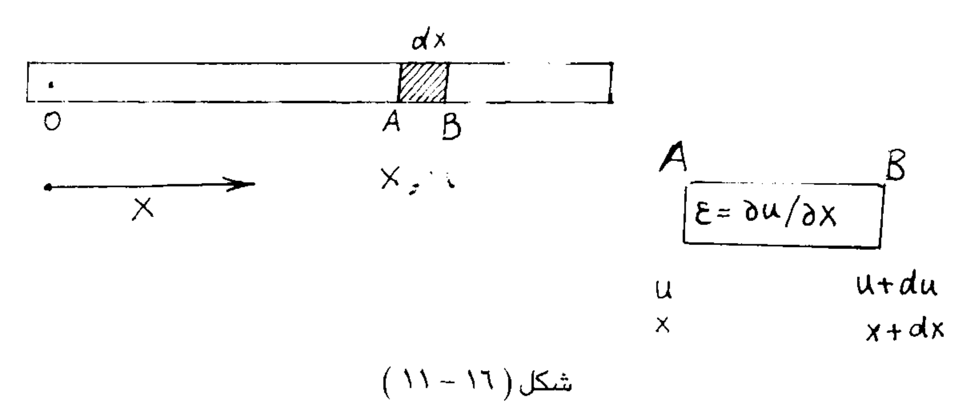
Lattice Vibrations and optical absorption of crystals .

قبل معالجة اهتزاز الشبيكة نبدأ أولا بدراسة :

معادلة انتشار الأمواج فى قضيب مرن :

اعتبر بلورة على شكل قضيب مرن متجانس ونفرض انتشار موجه فى اتجاه طوله (نعتبر هنا فقط الحالة الخطية) شكل (١٦ - ١١) .

نفرض ρ هى الكثافة الطولية للقضيب ، G هى معامل الصلابة



شكل (١٦ - ١١)

نفرض جزءا صغير dx من القضيب يبعد مسافة x من مركز الإحداثيات الواقع فى نقطة ما على القضيب ، وأن الإزاحة عن وضع الاتزان عند مرور الموجه الميكانيكية هى u

نفرض إزاحة الطرف A هى u وإزاحة الطرف B هى : $u + d u$

التغير في طول الجزء dx هو : du

∴ الانفعال الطولى الناشىء عن مرور الموجه هو :
$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

القوة المؤثرة والتى تسبب هذا الانفعال هى $F = G . \varepsilon$ اعتبر الآن نقطتين على القضيب البعد بينهما Δx فيكون الانفعال عند الأولى $\varepsilon (x)$ وعند الثانية $\varepsilon (x + \Delta x)$ وهذا يساوى

$$\varepsilon (x) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Delta x$$

∴ القوة المؤثرة على Δx هى :

$$G\left[\varepsilon(x+\Delta x) - \varepsilon(x)\right] = G \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Delta x$$

$$= G \,..\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x$$

∵ كتلة الجزء Δx تساوى $\rho \Delta x$

وبوضع القوة = الكتلة x العجلة تكون معادلة الحركة الموجية فى القضيب هى :

$$G . \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \Delta x = \rho . \Delta x . \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حيث سرعة الأمواج C تعطى بالمعادلة $C = \sqrt{G/\rho}$

حل المعادلة السابقة يكون على الصورة :

$$u = \eta \, e^{i(wt \pm kx)}$$

حيث η سعة الحركة ،

$\omega = k .c$ ، $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ وهو المتجه الموجى

الحركة الموجية على شبيكة خطية أحادية الذرة : mono atomic

اعتبر شبيكة خطية مكونة من سلسلة من الذرات المسافة بين كل اثنتين متجاورتين هى a وأن كتلة كل ذرة هى M شكل ١٦ – ١٢ نأخذ نقطة ما على الشبيكة كمركز إحداثيات ونرقم الذرات ترقيما متسلسلاً $1, 2, 3, ..., n, ..$ ثم نعتبر حركة الذرات أثناء انتشار الموجة .

O → a n - 1 n n + 1 u_{n-1} u_n u_{n+1}

شكل (١٦ - ١٢)

نفرض أن u_n هى : إزاحة الذرة ذات الرقم n

u_{n+1} هى : إزاحة الذرة n + 1

u_{n-1} هى : إزاحة الذرة n - 1 عن وضع الاتزان

الزيادة فى طول الرابطة Bond length بين الذرتين n ، n + 1 هو :

$$(u_{n+1} - u_n)$$

وباعتبار تأثير الجيران القريبة فقط من الذرة n تكون القوة F_n المؤثرة عليها هى :

$$F_n = \beta\left[(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1})\right]$$

حيث β هو ثابت القوة أى القوة لوحدة الاستطالة .

وبمقارنة هذه الحالة بالحالة الماكروسكوبية لقضيب نجد أن :

أولا : الكثافة الطولية $\rho = \frac{M}{a}$ حيث a المسافة بين الذرتين المتتاليتين . وقد حصلنا على هذه العلاقة باعتبار طول ١ سم من الشبيكة فيه عدد $\frac{1}{a}$ ذرات كتلة كل منها هى M فيكون كتلة وحدة الأطوال ρ هى : $\frac{M}{a}$.

ثانيا : القوة اللازمة لكى تستطيل الرابطة هى :

$$F = \beta\,(u_n - u_{n-1}) = \beta\,.\,\varepsilon\,.\,a$$

وذلك باعتبار أن الانفعال ε هو التغير النسبى فى طول الرابطة :

$$\varepsilon = \frac{u_n - u_{n-1}}{a} = \frac{\Delta x}{a}$$

$$\therefore \frac{F}{\varepsilon} = \beta\,.\,a = G$$

ثالثا : تصبح معادلة الحركة هى :

$$M\ddot{u} = \beta\,(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

حل المعادلة السابقة يكون على الصورة :

$$u_n = \zeta\, e^{i(\omega t + kna)}$$

وقد استبدلنا الإحداثى x للذرة n بالمقدار n . a فى المعادلة الموجيه فى القضيب المرن .

وبمفاضلة المعادلة السابقة مرتين بالنسبة للزمن وبالتعويض فى معادلة الحركة التفاضلية نحصل على :

$$\dot{u}_n = i\,\omega u_n \qquad \ddot{u}_n = -\,\omega^2 u_n$$

$$\therefore\ -M\,\omega^2 u_n = \beta\left[u_n e^{ika} + u_n e^{-ika} - 2u_n\right]$$

ويكون حل المعادلة صحيحا فقط عندما تكون المعادلة السابقة صحيحة أى عندما يكون:

$$\begin{aligned} -\omega^2 M &= \beta\,(e^{ika} + e^{-ika} - 2) \\ &= \beta\,(\cos ka + i\sin ka + \cos ka - i\sin ka - 2) \\ &= \beta\,(2\cos ka - 2) \\ &= 4\beta\left(\frac{\cos ka - 1}{2}\right) \\ &= -4\beta\sin^2\frac{ka}{2} \end{aligned}$$

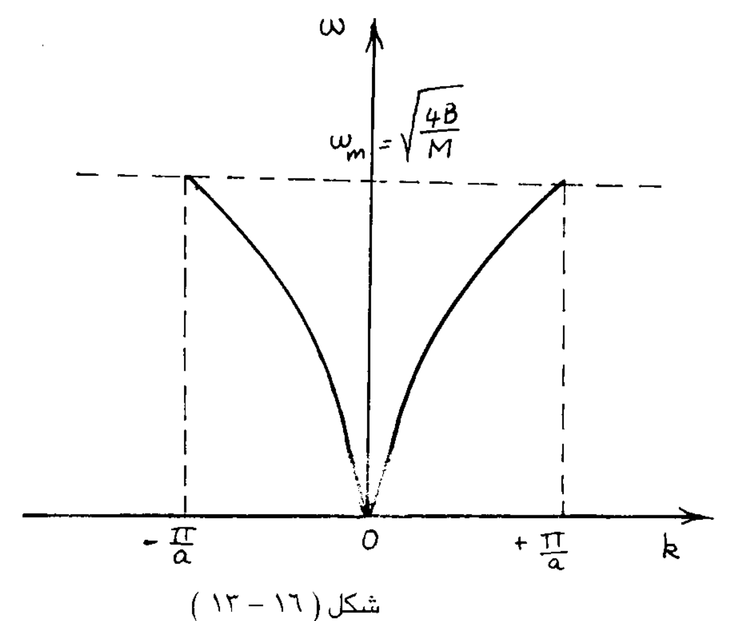
$$\therefore\ \omega^2 = \frac{4\pi}{M}\sin^2\frac{ka}{2}$$

$$\therefore\ \omega = \pm\left(\frac{4\beta}{M}\right)^{1/2}\sin\frac{ka}{2}$$

وتسمى هذه العلاقة Dispersion relation علاقة التشتيت . وعند رسم بيانيا ω بدلالة k نحصل على منحنى ذى فرعين أحدهما موجب والاخر سالبا كما فى شكل ١٦ –١٣ . ويلاحظ أن هناك حدا أقصى للترددات الموجية التى يمكن لها أن تنتشر على هذه الشبيكة وهذه نحصل عليها بوضع القيمة القصوى لـ sin ka / 2 وهى الواحد الصحيح

$\therefore$ معادلة أكبر تردد هى :

$$\omega_m = \left(\frac{4\pi}{M}\right)^{1/2}$$



شكل (١٦ - ١٢)

وهذه تناظر أكبر متجه موجى

$$k_m = \pm \frac{\pi}{a}$$

ونستنتج من ذلك ما يأتى :

أولا : بالنسبة للأمواج ذات الأطوال الكبيرة (k تكون صغيرة) يمكن اعتبار الجيب مساويا للزاوية أى أن :

$$\sin \frac{ka}{2} = \frac{ka}{2}$$

وتصبح السرعة الزاوية :

$$\omega = \left(\frac{\beta}{M}\right)^{1/2} . ka$$

لكن $\beta = G/a$ وكذلك $\rho = M/a$ $\therefore$ بالتعويض

$$\omega^2 = \frac{G}{Ma} k^2 a^2 = \frac{G}{a^2 \rho} k^2 a^2$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{G}{\rho}} . k = c . k$$

حيث c هى السرعة الموجية على قضيب مرن مكافىء .

ثانيا : تعطى علاقة التشتيت نهاية قصوى للتردد عندما يكون $k_m = \frac{\pi}{a}$ حيث

يكون الجيب مساويا واحد

أى أن اقصر طول موجة هو :

$$k_m = \frac{2\pi}{\lambda_{min}} = \frac{\pi}{a}$$

$$\therefore \lambda_{min} = 2a$$

وواضح أن أطوال الموجات الأقل من هذا لا تستطيع الانتشار فى هذه الشبيكة .

وبالنسبة للمواد المعتادة يكون $k_m = \frac{\pi}{a} \cong 10^8$ cm

ولكن سرعة الصوت تساوى تقريبا 3×10^5 سم / ثانية لذلك تكون قيمة أكبر تردد هى :

$$f_{max} = 3 \times 10^{12} \quad c/s$$

ويقع هذا التردد فى منطقة ترددات الأشعة تحت الحمراء ، ولكن هذه الموجات هى موجات ميكانيكية وليست كهرومغناطيسية لذلك فمن الصعب جدا إثارة الشبيكة لكى تهتز بهذه الترددات المرتفعة ، للآن أكبر تردد للمهتز الميكانيكى هو 10^9 ذبذبة / ثانية ، وقد أمكن الحصول عليه بواسطة بلورات من الكوارتز .

ذبذبة الشبيكة الخطية ثنائية الذرة

أعتبر شبيكة خطية ثنائية الذرة diatomic linear lattice (مثال ذلك بلورات كلوريد الصوديوم NaCl) نفرض أن كتلة نوعى الذرات المكونة للشبيكة هى m , M وأن المسافات بين الذرات هى a نفرض مركز إحداثيات ثابت على الشبيكة ونجرى ترقيم الذرات.

تكون الذرات من نوع m موجودة فى المواضع الزوجيه مثلا :

a

M m M m M m

O→ 2n - 2 2n - 1 2n 2n + 1

u_{2n-2} u_{2n-1} u_{2n} u_{2n+1}

شكل (١٦ - ١٤)

$$0, 2, 4, ..., 2n\ ,\ (2n + 2), (2n + 4), . .$$

بينما الذرات من نوع M تكون فى المواضع الفردية :

$$1, 3, 5, .., (2n - 1), (2n - 3), ...$$

انظر شكل (١٦ - ١٤)

نعتبر فقط التأثير البينى بين أقرب جيران ونهمل غير ذلك .

معادلة الحركة الموجية للذرات (أو الأيونات) من نوع m هى :

$$m\ \frac{d^2u_{2n}}{d\,t^2} = \beta\ \left(u_{2\,n+1} + u_{2\,n-1} - 2\,u_n \right)$$

وبالمثل بالنسبة للأيونات من النوع M معادلة الحركة هى :

$$M\ \frac{d^2u_{2n+1}}{d\,t^2} = \left(u_{2n+2} + u_{2n} - 2\,u_{2n+1}\right)$$

وحل المعادلتين السابقتين يكون على الصورة :

$$u_{2n} = \zeta\ e^{i\,(\omega t + 2\,n\,k\,a)}$$

سعة الحركة للذرة m هى : ζ

$$u_{2n+1} = \eta\ e^{i\,(w\,t + \overline{2\,n+1}\ k\,a)}$$

سعة الحركة للذرة M هى : η

ولإيجاد شرط أن تكون الحلول السابقة صحيحة نفاضل الحلين ونوجد

$\dot{u}_{2n}$, $\ddot{u}_{2n}$, $\dot{u}_{2n+1}$, $\ddot{u}_{2n+1}$ وبالتعويض فى المعادلات التفاضلية للحركة نحصل

على المعادلتين التاليتين :

$$- \omega^2 m \zeta = \beta \eta \left(e^{ika} + e^{-ika} \right) - 2 \beta \zeta$$
$$- \omega^2 M \eta = \beta \zeta \left(e^{ika} + e^{-ika} \right) - 2 \beta \eta$$

يكون للمعادلتين السابقتين حلولا حقيقية إذا تلاشى المحدد من معاملات ζ ، η أى أن:

$$\left(2 \beta - \omega^2 m \right) \zeta - \left(2 \beta \cos ka \right) \eta = 0$$
$$\left(- 2 \beta \cos ka \right) \zeta + \left(2 \beta - M \omega^2 \right) \eta = 0$$
$$\therefore \begin{vmatrix} 2 \beta - \omega^2 m & 2 \beta \cos ka \\ - 2 \beta \cos ka & 2 b - M \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

وبفك المحدد نحصل على :

$$\omega^2 = \beta \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm \beta \left[\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4 \sin^2 ka}{M m} \right]^{1/2}$$

وتسمى المعادلة السابقة بعلاقة التشتيت dispersion relation وقبل رسم العلاقة بين ω ، k نوجد أولا حالات الحدود عندما تكون k صغيرة جدا أو كبيرة .

أولا : عند قيم k الصغيرة جدا أى التى تؤول الى الصفر .

(أ) نعتبر الجزء الموجب من علاقة التشتيت ونضع قيمة دالة الجيب تساوى صفرا فنحصل على :

$$\omega_0^2 = 2 \beta \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)$$

(ب) عند اعتبار الجزء السالب فى العلاقة لا نضع الجيب مساويا للصفر حتى لا نحصل على قيمة صفرية لـ ω ولذلك نعتبر $\sin ka = ka$ فنحصل على :

$$\omega_0^2 = \frac{2 \beta}{M + m} \cdot k^2 \; a^2$$

ثانيا : لقيم k الكبيرة (وأقصى قيمة لها هى $k_m = \frac{\pi}{2 a}$)

أ – نعتبر الجزء الموجب من العلاقة ونضع قيمة الجيب مساوية للواحد الصحيح .

$$\therefore\ \omega_m^2 = \beta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) + \beta\left[\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{M}\right)^2 + \frac{2}{mM} - \frac{4}{mM}\right]^{1/2}$$

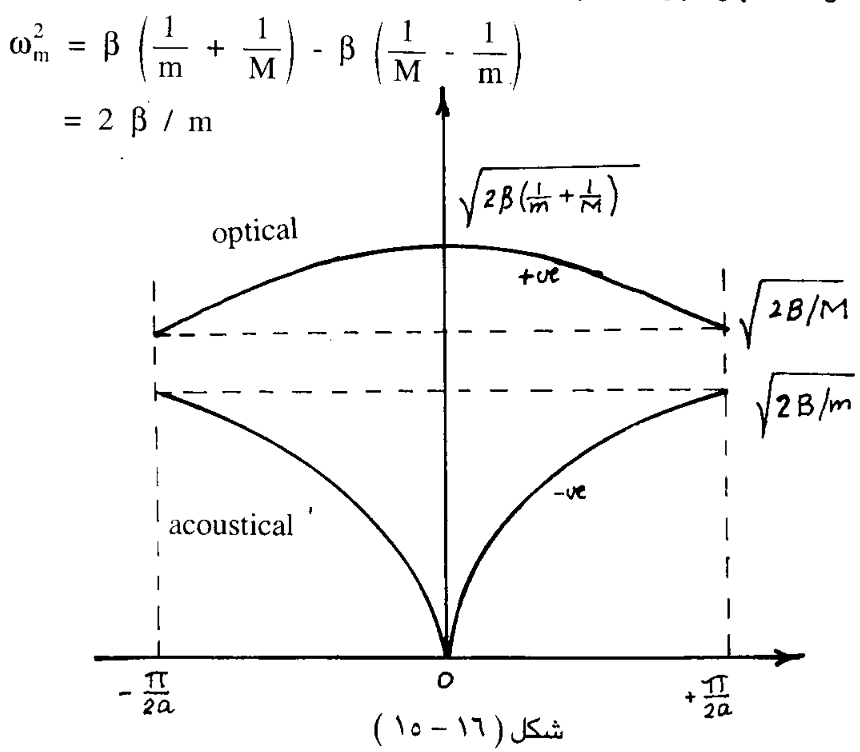
$$= \beta\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{m}\right) + \beta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

$$= 2\ \beta\ /\ M$$

ب – وعند اعتبار الجزء السالب نحصل على :

$$\omega_m^2 = \beta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) - \beta\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{m}\right)$$

$$= 2\ \beta\ /\ m$$



شكل (١٦ – ١٥)

وبرسم العلاقة بين ω & k نحصل على منحنى ذى فرعين شكل (١٦ – ١٥) يسميان عادة :

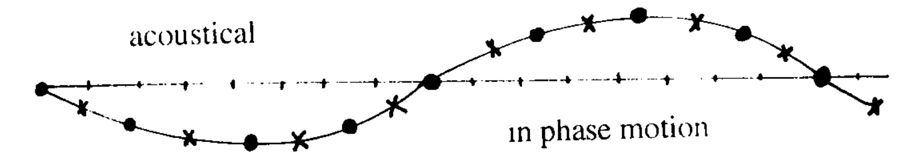
الفرع الصوتى : acoustical branch

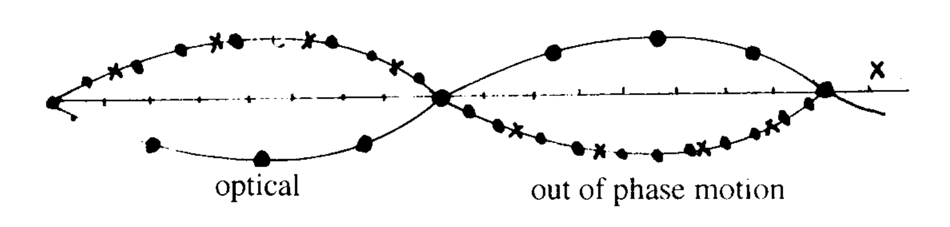
والفرع الضوئى . optical branch

ويمكن لنا فهم طبيعة هذين الفرعين إذا اعتبرنا حركة الذرات المختلفة فى الشبيكة .

تتحرك الذرات فى الفرع الصوتى بنفس الطور أى أن الموجة تعتبر موجه طولية ،

ولهذا سميت صوتية وتكون حركة الذرات كلها فى طور واحد in phase شكل (١٦ - ١٦).





شكل (١٦ - ١٦)

أما بالنسبة للفرع الضوئى نجد أ الذرات تتحرك بحيث تكون عكسية فى الطور . anti-phase

وهذا النوع من الأمواج مستعرض ويشبه الأمواج الكهرمغناطيسية ولذا سمى هذا الفرع بالضوئى .

ولإظهار تلك الحركات الذرية نوجد النسبة بين سعتى الحركة للذرتين M , m

أى نوجد النسبة بين (ζ , η) من معادلتى المحدد .

$$\therefore \frac{\zeta}{\eta} = \frac{2\beta \cos ka}{2\beta - \omega^2 m}$$

وتختصر هذه المعادلة للقيم الصغيرة لـ k إلى :

$$\frac{\zeta}{\eta} = \frac{2\beta}{2\beta - \omega^2 m}$$

وباعتبار الفرع الضوئى حيث :

$$\omega_0^2 = 2\beta \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

وبالتعويض نحصل على :

$$\frac{\zeta}{\eta} = \frac{2\beta}{2\beta - 2\beta m\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)}$$

$$= -\frac{M}{m}$$

الإشارة السالبة هنا تعنى فيزيائيا أى حركة الذرات M تكون فى عكس طور الذرات m . anti-phase motion

وباعتبار الفرع الصوتى حيث $0 \longrightarrow \omega_0$ يكون :

$$\frac{\zeta}{\eta} = \frac{2\beta}{2\beta - 0} = 1$$

وهذا يدل على أن حركة الذرات جميعها فى نفس الطور .

امتصاص البلورات للأشعة تحت الحمراء I R absoorption :

أمكن التحقق عمليا من صحة النظرية البسيطة السابقة عن اهتزاز الشبيكة ، وذلك باعتبار تأثر شبكية خطية ثنائية الذرة عند تشعيعها بأمواج كهرمغناطيسية فى منطقة الأشعة تحت الحمراء ، شدتها :

$$E = E_0 \; e^{i\omega t}$$

التردد ω لهذه الأشعة فى منطقة حول ٣ × ١٠ ^١٢^ ذبذبة فى الثانية وطول موجتها حوالى ١٠٠ ميكرون وهذا يعطى متجه موجى

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \cong 600 \;/\; cm$$

وهذه القيم لـ k صغيرة جدا عند مقارنتها بقيمة أكبر متجه موجى لاهتزاز الشبيكة .

تقريبا $\quad k_m = \frac{\pi}{2a} = 10^6 \;/\; cm$

ولذلك عند تشعيع الشبيكة بأمواج تحت الحمراء نعتبر علاقة التشتيت عندما يؤول

متجه الموجه إلى الصفر . dispersion relation

يجب فى هذه الحالة تعديل معادلات الحركة للذرات وحلولها بحيث تتضمن حدا جديدا هو $\pm e E_0$ يعبر عن القوة التى يؤثر بها المجال الكهرمغناطيسى للأشعة تحت الحمراء على أيونات الشبيكة الموجبة والسالبة .

إذا كانت سعة شدة المجال الكهربى E_0

Amplitude of the electric intensitty

وكانت الشحنات على الأيونات المتجاورة هى $\pm e$ فإن القوة المؤثرة عليها هى $\pm e E_0$

ويصبح حلا المعادلتين الموجيتين للأيونين m , M هما

$$- \omega^2 m \zeta = \beta \eta (e^{ika} + e^{-ika}) - 2 \beta \zeta - e E_0$$

$$- \omega_0 M \eta = \beta \zeta (e^{ika} + e^{-ika}) - 2 \beta \eta + e E_0$$

وعندما تكون k صغيرة تصبح المعادلتين

$$- \omega^2 m \zeta = 2 \beta (- \zeta + \eta) - e E_0$$

$$- \omega^2 M \eta = 2 \beta (\zeta - \eta) + e E_0$$

وبحل المعادلتين لإيجاد η ، ζ نجد أن :

$$\eta = \frac{e E_0 / M}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad ; \quad \zeta = \frac{- e E_0 / M}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

حيث

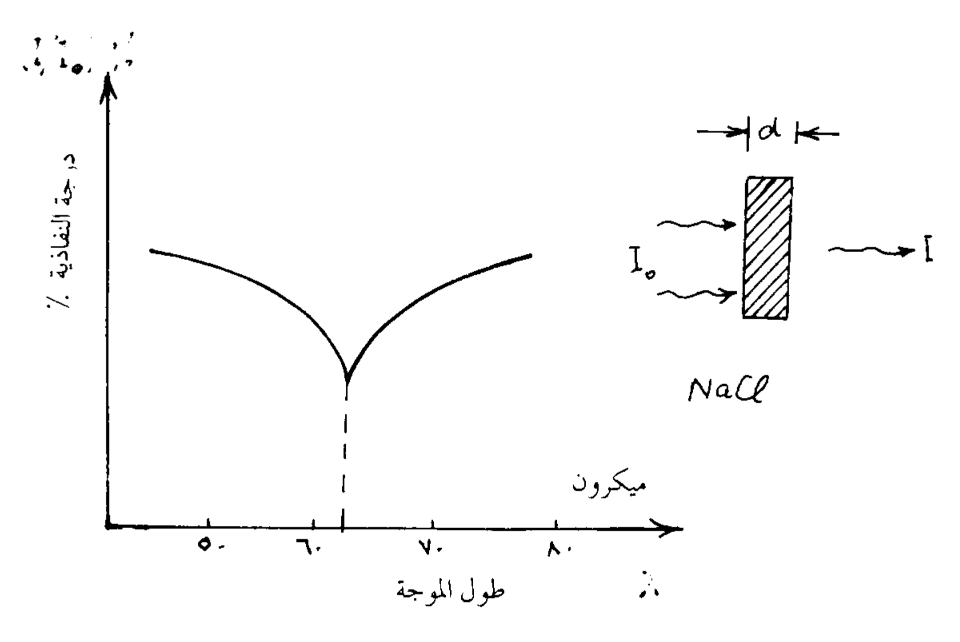
$$\omega_0^2 = 2 \beta \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)$$

وهى القيمة التى تناظر $k = 0$ أى عند حدود الفرع الضوئى optical branch .

من المعادلتين السابقتين يتضح حدوث أكبر سعة حركة للذرات عندما تقترب ω من ω_0 وتمتص طاقة الحركة اللازمة للذرات عندئذ من طاقة الأشعة الساقطة ، وكلما ازدادت سعة الحركة كلما ازدادت درجة الامتصاص الداخلى للطاقة المستخدمة فى إثارة ذبذبات الشبيكة .

تطبيق على شبيكة كلوريد الصوديوم :

عند تشعيع بلورة من كلوريد الصوديوم بأمواج تحت الحمراء وجد حدوث أكبر امتصاص أى أقل نفاذية عندما كانت أطوال الموجات الساقطة 61.1 ميكرون . شكل (١٦-١٧) كما لوحظ أيضا حدوث أكبر انعكاس للأشعة على سطح البلورة وهو ما يسمى : Selective reflection عند طول موجة قريب من هذا (حوالى 52 ميكرون)

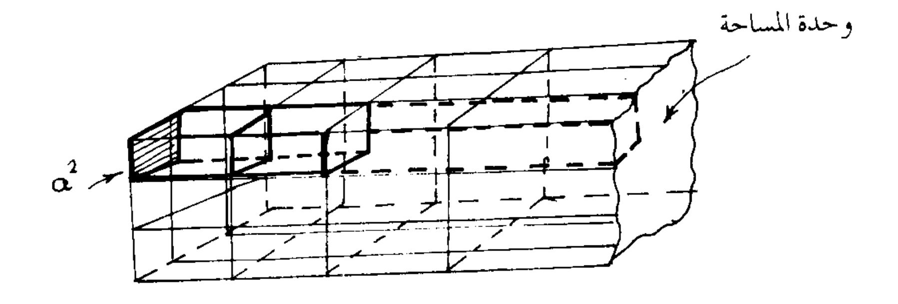


شكل (١٦- ١٧)

ولكى نتمكن من مقارنة النظرية بالتجربة نعتبر معامل الصلابة C_{11} لبلورة كلوريد الصوديوم ويساوى 5×10^{11} داين / سم٢ فى (3 - D)

ثابت القوة ρ للشبيكة الخطية (1 - D) يساوى G / a حيث a هو البعد بين الذرات المتجاورة G هو معامل الصلابة الخطى . باعتبار البلورات الحقيقة يمكن اعتبار أن هناك عدد $\frac{1}{a^2}$ شبيكة خطية فى كل وحدة مساحات (انظر شكل ١٦ – ١٨)

يكون ثابت القوة $\beta_{3-D} = a \cdot C_{11}$



شكل (١٦ – ١٨)

$$\beta_{3\text{-}D} = \frac{C_{11}}{a} / \frac{1}{\alpha^2} = a \cdot C_{11}$$

$$C_{11} = 5 \times 10^{11} \ \text{dys} / \text{cm}^2$$

بوضع $a = 3 \times 10^{-8}$ cm لكلوريد الصوديوم يكون ثابت القوة

$$\beta = 1.5 \times 10^{4} \ \text{dyn} / \text{cm}$$

ومن النظرية السابقة

$$\omega_0^2 = 2 \beta \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)$$

حيث m كتلة ذرة الصوديوم وتساوى 23 وحدة كتلة ذرية

M كتلة ذرة الكلور وتساوى 35.5 وحدة كتلة ذرية وبمعرفة أن وحدة الكتلة الذرية $= 1.67 \times 10^{-24}$ جم تكون

$$\omega_0^2 = 2 \times 1.5 \times 10^{4} \times \left(\frac{1}{35.5} + \frac{1}{23} \right) \times \frac{1}{1.67 \times 10^{-24}}$$

$$\therefore \ \omega = 3.6 \times 10^{13} \ \text{rad.} / \text{sec.}$$

لكن باعتبار التردد f_0 تكون

$$\omega_0 = 2 \pi f_0$$

أيضا :

$$c = 3 \times 10^{10} \ \text{cm/s}$$

$$\therefore \ \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{c}{\omega_0 / 2\pi} = 50 \ \mu$$

أى أن طول الموجة الذى يحدث عنده أكبر سعة حركة للذرات ، وبالتالى أكبر امتصاص لطاقة الأشعة هو 50 ميكرون بينما القيمة المناظرة لذلك مقاسة فى المعمل هى 61.1 ميكرون وتعد هذه النتيجة العملية محققة للنظرية .

وعموما يكون لكل البلورات الأيونية التي يمكن تطبيق عليها نظرية الشبكة ثنائية الذرة ، يكون لها امتصاص مميز فى منطقة الأشعة تحت characteristic absorption الحمراء .

مسائل على الباب السادس عشر

١ – تمتص بلورة من كلوريد الصوديوم الأشعة تحت الحمراء امتصاصا شاذا عند طول الموجة $50\ \mu$. احسب البعد الشبيكى للبلورة ؟

الوزن الذرى للكلور 35.5 وللصوديوم 23

معامل صلابة كلوريد الصوديوم $10^{11} \times 5$ داين / سم٢ .

٢ – شبيكة خطية أحادية الذرة بعدها الشبيكى $5\ ^\circ A$. إذا كانت سرعة انتشار الأمواج فيها 3×10^5 cm/s . أوجد أكبر تردد لها ؟

٣ – يبين الجدول التالى السعة الحرارية الجزيئية C لشبيكة من 10 % فانيديوم 90 % كروم بالقرب من درجة الصفر المطلق

T K	1.45	1.5	1.618	1.824	2.106	2.994	3.236	3.637	3.848	4.073	°K
C	7.57	7.94	9.67	9.67	11.2	16.5	18	20.6	22	23.6	cal/g mole K

ارسم العلاقة بين (C / T) بدلالة (T^2) ، وأثبت أن القراءات تحقق العلاقة

$$C = \gamma T + \propto T^3$$

ثم أوجد الثوابت ($\gamma , \propto$) وما يمكن استنتاجه منهما من ثوابت طبيعية .

٤ – أوجد قيمة تقريبية للتردد الذرى فى النحاس إذا علم أن معامل يونج لمرونة النحاس $25\ N.m^2$ والوزن الذرى له 63.5 .

٥ – اشرح مستعينا بمبادىء الديناميكا الحرارية لماذا تتحول المادة الصلبة من طور إلى آخر عند رفع درجة الحرارة ؟ ثم عرف نقطة λ . λ - point ؟

٦ – احسب السعة الحرارية للغاز الإلكترونى فى النحاس عند درجة حرارة الغرفة . اعتبر الكترونا واحدا حرا فى كل ذرة ، ثم قارن هذه القيمة بقيمة السعة الحرارية المقاسة عمليا 2.4×10^4 J $(\text{kg mole})^{-1}$ k^{-1}

٧ – أوجد الحرارة الذرية لكل من الألومنيوم والنحاس عند درجة 1 K .

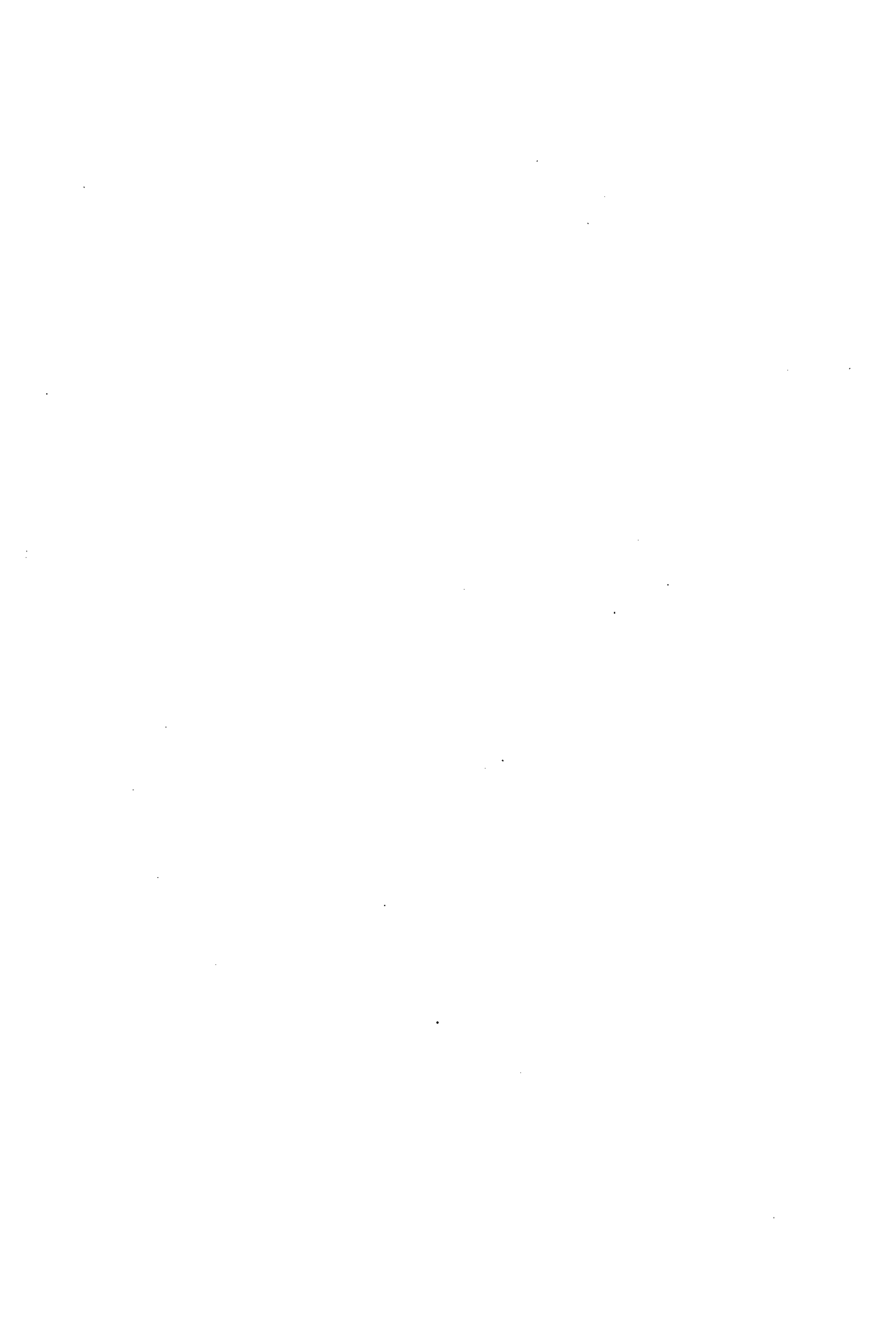
درجة حرارة ديباى $\theta(A\ell) = 398$; $\theta(Cu) = 315$

قارن هذه القيم بالحرارة الذرية الإلكترونية عند نفس الدرجة

طاقة فيرمى $E_F(A\ell) = 11.7$ e v ; $E_F(Cu) = 7.1$ e v

٨ – اعتبر شبيكة خطية من N ذرات . ماذا يكون التوزيع الطيفى للترددات باعتبار تقريب ديباى ؟ افترض أن سرعة الصوت V_0 وارسم هذا التوزيع بيانيا ؟

ماذا يكون أكبر تردد لانتشار الفوتونات على الشبيكة ؟ أوجد الطاقة الداخلية للشبيكة U عند درجة الحرارة T ، ثم أثبت أن الحرارة الذرية لهذه الشبيكة عند الدرجات المنخفضة تتناسب طرديا مع درجة الحرارة المطلقة T . ؟



الباب السابع عشر

نظرية الانتشار فى الجوامد Theory of diffusion in solids :

ظاهرة الانتشار فى المواد الصلبة هى انتقال الذرات من نقط الشبيكة التى كانت تشغلها أصلا ، إلى نقط مجاورة دون العودة إلى أوضعها الأولى .

Diffusion is an irreversible flow of matter .

ويسمى الانتشار ذاتيا self diffusion فى حالة حركة ذرات المواد النقية ، التى لا تحتوى سوى نوع واحد من الذرات .

وحدة عملية الانتشار The unit difusion process :

تتحرك ذرات المادة عند درجات الحرارة الأعلى من درجة الصفر المطلق حركة تذبذبية حول مواضع اتزانها ، ووحدة عملية الانتشار أو القفزة <<jump>> تحدث كلما تغير الوضع المتوسط للذرة mean position ويحدث ذلك عندما تتحصل الذرة على طاقة كبيرة بدرجة كافية فتقفز فوق حاجز الطاقة ، لتنتقل إلى النقطة المجاورة فى الشبيكة بفرض أنها خالية من الذرات ، شكل (١٧ - ١) .

وتكون عملية الانتشار عبارة عن محصلة جميع القفزات الذرية التى تتم داخل البلورة على مدى زمنى كبير بالنسبة للزمن المميز للذبذبات الحرارية

characteristic time of thermal vibration .

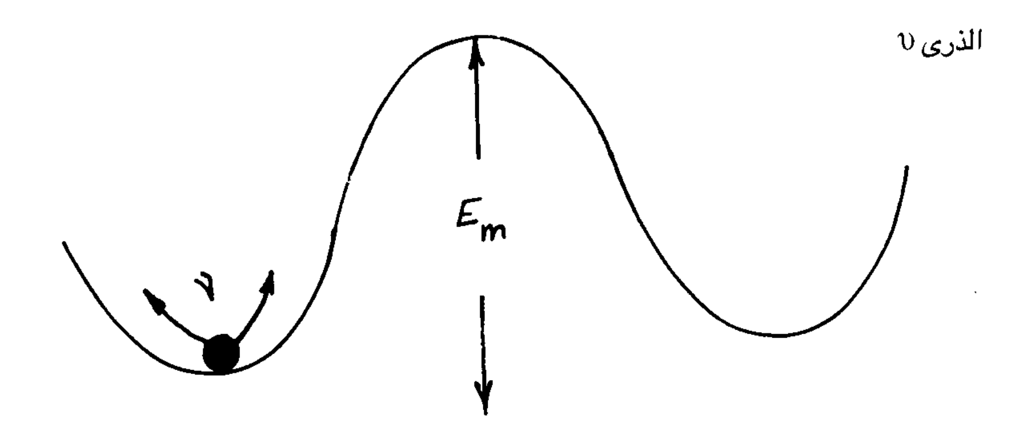
ويجب لذلك دراسة عملية الانتشار على أساس إحصائى .

متوسط زمن القفزه Average jump time :

هو متوسط الزمن الذى يمضى بين قفزتين ذريتين ناجحتين ومتتاليتين فى الشبيكة .

ويتوقف هذا الزمن على عدة عوامل هى :

أ - عدد المرات التى تحاول فيها الذرة أن تقفز فوق حاجز الطاقة وتساوى التردد



شكل (١٧ - ١)

ب - احتمال أن تحصل الذرة من طاقة التهيج الحرارى kT خلال ذبذبة واحدة على قدر من الطاقة ، يسمح لها بالقفز فوق حاجز الطاقة وارتفاعه E_m .

يساوى هذا الاحتمال حسب القوانين الإحصائية لماكسويل .

$$\exp(-E_m / kT)$$

جـ - احتمال آخر P يتوقف على أن يكون للذرة قدرا كافيا من الطاقة لكى تنتقل فعلا إلى نقطة شبيكة مجاورة .

وهذا الاحتمال يتوقف على :

أ - عدد أقرب جيران coordintion number وهى نقط الشبيكة المجاورة التى يمكن للذرة أن تقفز إليها وكلما زاد عدد أقرب جيران ، كلما ازداد احتمال القفز ، وهذا يتوقف على نوع الشبيكة .

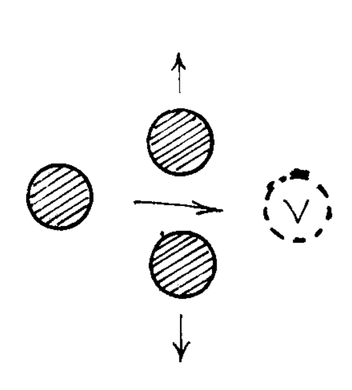
ب - احتمال أن تكون أحد هذه النقط المجاورة خالية ، إذ ليس من المعقول أن تقفز الذرة من مكانها إلى المكان المجاور إذا لم يكن خاليا ، حتى ولو استوفت جميع الشروط الأخرى ، واحتمال أن تكون إحدى نقط الشبيكة خالية vacant site يتوقف على تركيز الشواغر فى البلورة vacancy concentration ويتوقف هذا التركيز على درجة الحرارة المطلقة T K للبلورة تبعا للمعادلة :

$$C = \exp(-E_f / k t)$$

حيث E_f هى الطاقة اللازمة لتكوين الفراغة (الشاغرة) الواحدة .

جـ - احتمال أن تكون الثغرة بين الذرات التى سيتم القفز خلالها كبيرة بقدر كاف ، لتسمح بمرور الذرة المنتشرة شكل (١٧ - ٢) ، فى اللحظة التى تكون طاقتها أكبر من E_m ، و تكون متجهة الى نقطة الشبيكة المجاورة الخالية ، وهذا الاحتمال يتوقف على انتروبيا التنشيط ΔS entropy of activation للذرة ويساوى تقريبا

$$\exp(\Delta s / k)$$



شكل (١٧ - ٢)

مما سبق يكون احتمال القفزة ويساوى مقلوب متوسط زمن القفزة ($\frac{1}{\tau}$) هو :

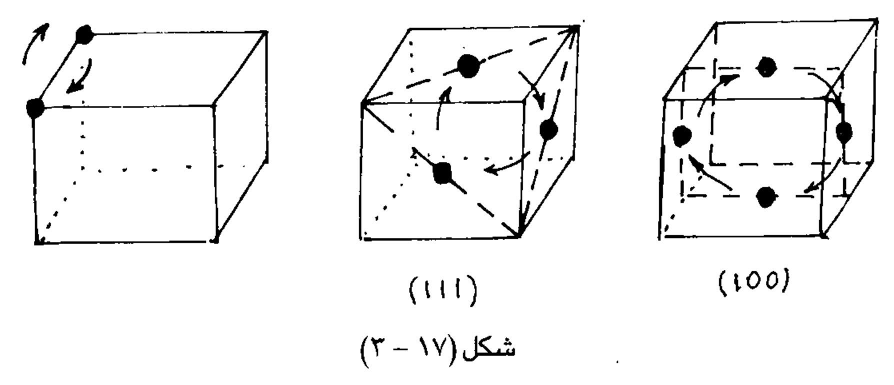
$$\frac{1}{\tau} = P \upsilon \ e^{(-E_m / k T)}$$

طرق الانتشار الذرى Mechanism of atomic difusion .

تحدث عادة وحدة الانتشار unit diffusion act بإحدى الطرق الآتية :

١ - الانتشار التبادلى Interchange diffusion :

يمكن لأى ذرتين متجاورتين أن يتبادلا الأماكن ، ويمكن أيضا أن يتم تبادل المواضع بين ثلاث ذرات أو أربع على شكل تبادل حلقى كما فى شكل (١٧ - ٣).

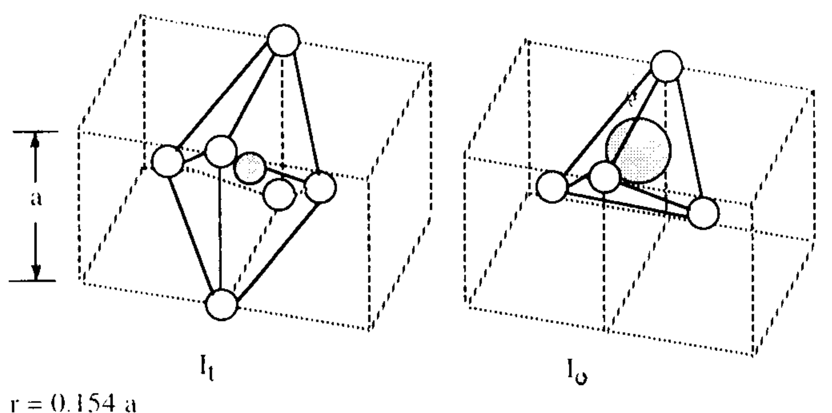


شكل (١٧ - ٣)

٢ - الانتشار التخللى :

توجد دائما بين الذرات فى أى شبيكة بعض الفراغات قد تسمح بتسكين ذرات صغيرة الحجم ، تكون مواضعها بين نقط الشبيكة ، فمثلا : فى شبيكة متمركزة الوجة التكفيبى b. c. c. توجد هذه الفراغات ين الذرات كما فى شكل (١٧ - ٤) فى المواضع :

$$I_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0\right) \quad \& \quad I_t\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$



شكل (١٧ - ٤)

يحدث الانتشار التخللى عندما يكون الحجم الذرى للذرات المنتشرة صغيرا بالنسة لحجم ذرات المادة المضيفة ، فمثلا فى حالة انتشار الكربون فى بلورة حديد يتم الانتشار بهذه الطريقة إذ أن حجم ذرة الكربون هى فقط ٦و٠ من حجم ذرة الحديد، وهذا يسهل عملية الانتشار التخللى .

٣ - الانشار بواسطة الشواغر Vacancy diffusion :

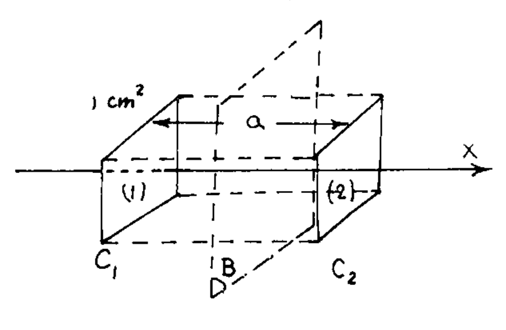
توجد الشواغر (وهى نقطة الشبيكة الغير مشغولة بذرات) عند أى درجة حرارة أعلى من الصفر المطلق ، ويتم الانتشار هنا بالانتقال المباشر للذرة من مكانها لتشغل المكان الخالى .

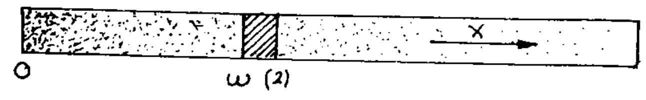
تتوقف طريقة الانتشار فى أى مادة على التركيب البلورى لها ، وكذلك على نوع الذرات المكونة لها ، فمثلا : فى حالة المواد النقية يتم الانتشار الذاتى عادة بواسطة الشواغر ، أما فى حالة المحاليل الصلبة solid solutions المكونة من ذرتين B , A ، فيتوقف نوع الانتشار على طبيعة المحلول ، فإذا كان من نوع المحاليل الصلبة التبادلية substitutional solution تكون حجوم الذرات B , A متقاربة ، كما هو الحال فى النحاس الأصفر Cu Zn ، ولذلك يسهل الانتشار التبادلى ، وفى حالة الذرات صغيرة الحجم يمكن أن يكون الانتشار تخلليا interstitial .

قوانين الانتشار لفيك Ficks diffusion laws :

القانون الأول :

اعتبر قضيباً من شبيكة يتغير فيه بانتظام تركيز نوع معين من الذرات A مثلا فى اتجاه طوله ، ومساحة مقطعة الوحدة ، شكل (١٧ - ٥)





شكل (١٧ - ٥)

نفرض مستويين (١) ، (٢) عموديين على اتجاه الانتشار يكون تركيز الذرات من نوع A عندهما $\left(C_1 > C_2\right)$ ، ونفرض مستوى B يقع في منتصف المسافة بينهما .

عدد ذرات النوع A فى المستوى (١) = $n_1(A)$

وعدد الذرات من نفس النوع فى المستوى (٢) = $n_2(A)$

فى أثناء الانتشار تقفز الذرات من النوع A عابرة المستوى المتوسط B من كل من الجهتين .

ليكن P_{12} , P_{21} هما الاحتمالان لوحدة الزمن لكى تقفز ذرة A المستوى (١) إلى المستوى (٢) وبالعكس . عددد مرات القفز The frequency of jumps من المستوى (١) إلى المستوى (٢) خلال وحدة المساحات فى وحدة الزمن = $P_{12} \cdot n_1(A)$

أيضا تردد القفزات من (٢) إلى (١) = $P_{21} \cdot n_2(A)$

إذا كان F هو التدفق الفعلى net flow لكل سم٢ فى الثانية

$$\therefore\ F = P_{12} \cdot n_1 - P_{21} \cdot n_2$$

و تتوقف قيم P_{12} ، P_{21} عادة على تركيز الذرات على جانبى المستوى الذى يتم التدفق خلاله ، فإذا اعتبرنا التدفق فى نقطة ما داخل البلوره يمكن اعتبار أن $P_{12} = P_{21} = P$ أى أن احتمال القفزة واحد فى أى الاتجاهين ، ويكون التدفق فى الاتجاه السينى هو :

$$\therefore F_x = P\left(n_1 - n_2\right)$$

إذا كانت a هى المسافة بين المستويين (١) ، (٢) وأن التغير فى التركيز بينهما هو $dC = n_1 - n_2$ يكون ميل التركيز هو : dC /dx concentration gradient

وبتعريف C بأنها تركيز الذرات من نوع A فى وحدة الحجوم ، يكون التدفق للحجم a x 1 سم٣ هو :

$$\therefore\ F = -P\left(n_1 - n_2\right) \cdot a \times 1$$

وقد وضعنا إشارة سالبه ؛ لأن التركيز يتغير بالنقصان فى اتجاه تزايد x

$$\therefore \quad F = -P a^2 \frac{dC}{dx} = -D \frac{dC}{dx}$$

ويسمى F بتيار الانتشار كمايطلق على $P a^2$ معامل الانتشار ويعطى الرمز D ووحداته سم٢ / ثانية .

وهذا هو قانون فيك الأول للأنتشار ، ويوضع عادة على صورة متجهات :

$$\vec{F} = -\vec{D} \ \text{grad} \ \vec{C}$$

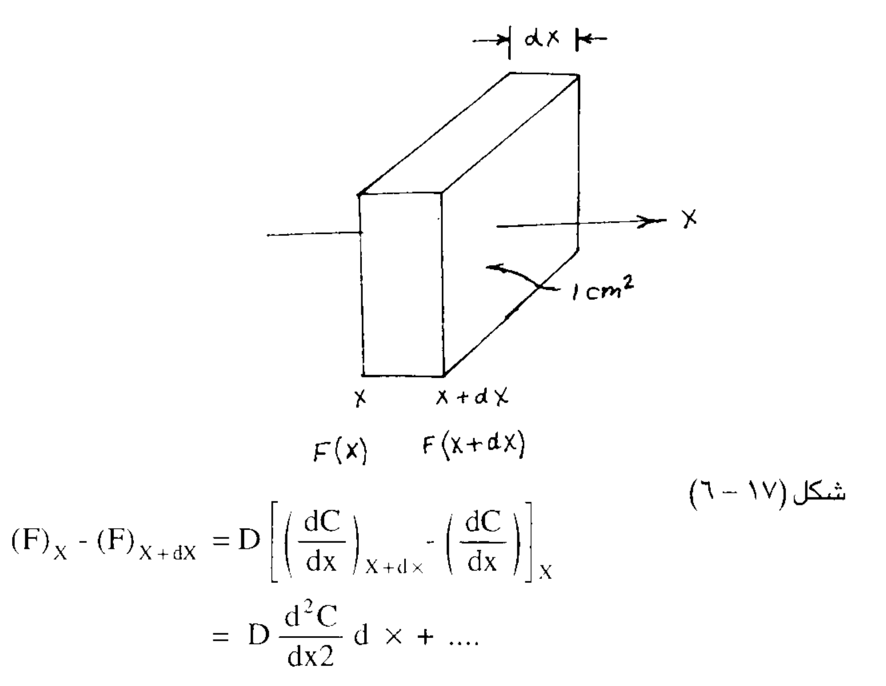
وفى حالة المواد التى ليس لها خواص اتجاهية Isotropic يكون معامل الانتشار D يتوقف على اتجاه ميل التركيز ويساوى مربع مسافة الانتشار x مقسوما على زمن الانتشار $D = x^2 / t$ ولكن بالنسبة للمواد التى تظهر تغيرا فى خواصها فى الاتجاهات المختلفة anisotropic ، نجد أن معامل الانتشار يأخذ قيما مختلفة فى الاتجاهات المختلفة tensor quantity ويتوقف D على درجة الحرارة تبعا للعلاقة $D = D_0 \, e^{-E/kT}$ حيث E طاقة التنشيط للانتشار ، k ثابت بولتزمان .

قانون الانتشار الثانى لفيك : Fick's second diffusion law

يطبق القانون الأولى فقط فى حالة الانتشار ، عندما يكون هناك ميل تركيزى ثابت أثناء الانتشار ، أى حالة التدفق المنتظم steady state flow ،

ولكن عند حدوث الانتشار فى الحقيقة تتغير مع الزمن قيمة التركيز عند أى نقطة داخل المادة .

ويعالج القانون الثانى موضوع إدخال الزمن كمتغير فى معادلة الانتشار . نعتبر منشورا مساحة الوجه فيه ١سم٢ وسمكه dx ثم نعتبر الانتشار فى الاتجاه السينى فقط إلى داخل المنشور الواقع بين النقطتين x , x + dx شكل (١٧ – ٦) يكون تيار التدفق الفعلى هو الفرق بين تيارى التدفق من الجهتين أى أن :



شكل (١٧ - ٦)

$$(F)_X - (F)_{X+dX} = D\left[\left(\frac{dC}{dx}\right)_{X+dx} - \left(\frac{dC}{dx}\right)\right]_X$$

$$= D\frac{d^2C}{dx2}\, d \times + \ldots$$

بقسمة طرفى المعادلة على حجم المنشور وهو $dx \times 1$ تكون كمية المادة المنتشرة فى وحدة الحجوم عند النقطة x فى لحظة ما هى :

$$\frac{dC}{dt} = D\frac{d^2C}{dx^2}$$

عندما يكون الانتشار فى جميع الاتجاهات داخل المادة ، تضاف حدود تمثل الانتشار فى الاتجاهين y , z

$$\therefore \frac{dC}{dt} = D\left[\frac{d^2C}{dx^2} + \frac{d^2C}{dy^2} + \frac{d^2C}{dz^2}\right]$$

$$= D\nabla^2 C$$

حيث ∇^2 هو معامل تشغيل لابلاس Laplace's operator ويلاحظ هنا أن كمية المادة الكلية التى تنتشر تظل دون تغيير مع الزمن The diffusing material is always conserved .

فإذا كان التركيز عند النقطة x, y, z داخل البلورة هو C(x, y, z) فإن كمية المادة المنتشرة داخل حجم صغير dxdydz فى هذا المكان هو C dx dy dz ويعطى تكامل هذا المقدار الكمية الكلية للمادة المنتشرة .

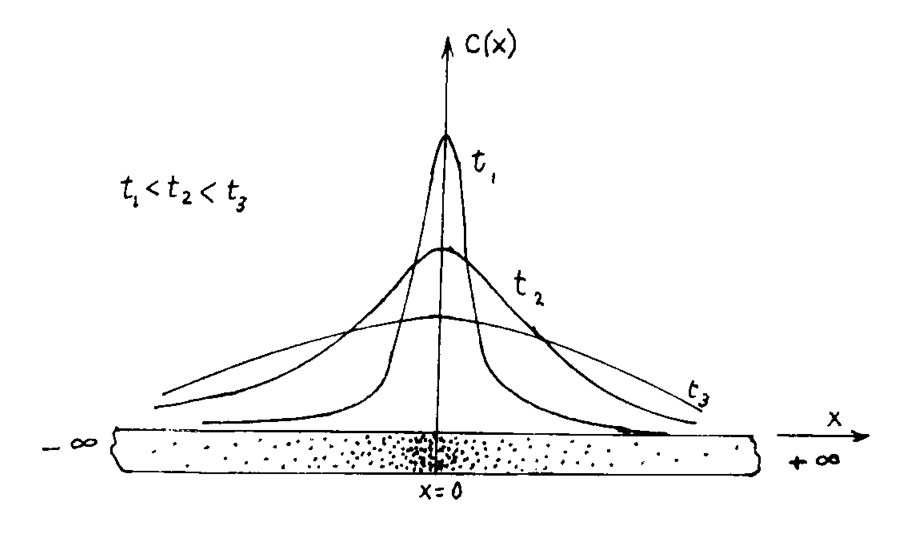
أى أن
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C \; dx\, dy\, dz = S$$

حيث S هو مقدار ثابت عبارة عن كمية المادة المنتشرة .

حل معادلة الانتشار فى بعد واحد :

1 - D solution of the difusion equation .

نفرض أننا أدخلنا فى مادة نقية على شكل قضيب كمية من مادة منتشرة ونفرض أنها وضعت على مقطع القضيب ، شكل (١٧ – ٧) عند نقطة $x = 0$ أى عند مركز الإحداثيات فى اللحظة $t = 0$ وأن القضيب يمتد فى الاتجاه السينى من $-\infty$ إلى ∞



شكل (١٧ – ٧)

عند $t = 0$ (بدء الزمن) يكون التركيز للذرات المنتشرة صفريا فى كل مكان داخل القضيب ماعدا عند $x = 0$ ، حيث يكون التركيز C لا نهائيا .

وبما أن كمية المادة المنتشرة محدودة داخل القضيب

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} C \; dx = S \qquad \ldots\ldots \; \ldots\ldots (1)$$

وتظل قيمة هذا التكامل محدودة دائما حتى عند الزمن $t = 0$ معادلة الانتشار هى:

$$\frac{dC}{dt} = D\,\frac{d^2C}{dx^2} \qquad \text{...... ...(2)}$$

وجد بالتجربة فى معظم حالات الانتشار التى درست أن المتغيرات t , x تدخل دائما فى العلاقة المستنتجة على شكل دالة أسية من النوع

$$\exp\left(-\frac{\lambda x^2}{t}\right)$$

حيث λ مقدار ثابت وعلى هذا الأساس يكون الحل المقترح للمعادلة التفاضلية trial solution هو

$$C = f(x)\,.\,h(t)\,.\,\exp\left(-\lambda\,\frac{x^2}{t}\right) \qquad \text{..... ....(3)}$$

ويقضى الحل أن يكون التركيز C دائما محدودا فى كل مكان ، وكذلك عند $x = 0$ إلا عند ابتداء الزمن $t = 0$

إذا كان الحل المقترح صحيصه فإنه يجب أن يحقق المعادلة التفاضلية

لذلك بالتفاضل والتعويض نوجد $\left(\frac{dC}{dt}\right)_x$ وكذلك $\left(\frac{d^2C}{dx^2}\right)_t$

ثم بحل المعادلة نجد أن :

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_X = f(x)\left[h(t)\,e^{-\lambda x^2/t}\,\frac{\lambda x^2}{t^2} + e^{-\lambda x^2/t}\,.\,h^1(t)\right]$$

$$= f(x)\,h(t)\,e^{-\lambda x^2/t}\left(\frac{\lambda x^2}{t^2} + \frac{h^1(t)}{h(t)}\right) \qquad \text{.....(4)}$$

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_t = h(t)\left[f(x)\,e^{-\lambda x^2/t} - \frac{2\lambda x}{t} + e^{-\lambda x^2/t}\,.\,f^1(x)\right]$$

نفرض هنا $f(x)$ مقدار ثابت محدود تكون المشتقة $f^1(x)$ تساوى صفرا فيحذف الحد الثانى من المعادلة السابقة ثم نفاضل مرة ثانية بالنسبة إلى x $\left(f^1(x) \neq \infty ،\ f(x) \neq 0\right)$

$$\left(\frac{d^2C}{d\,t^2}\right)_t = h\,(t)\left(f\,(x)\,.\,-\frac{2\lambda}{t}\,(\,e^{-\lambda x^2/t} + xe^{-\lambda x^2/t} - \frac{2\,\lambda\,x}{t}\,)\right)$$

$$= h\,(t)\,f\,(x)\,e^{-\lambda x^2/t}\,.\,\frac{2\,\lambda}{t}\,(1 - \frac{2\,\lambda\,x^2}{t}\,)$$

$$\therefore\ D\left(\frac{d^2C}{d\,x^2}\right)_t = -\,D\,h\,(t)\,f\,(x)\,e^{-\lambda x^2/t}\,.\,\frac{2\,\lambda}{t}\left(1 - \frac{2\,\lambda\,x^2}{t}\right) \qquad \ldots.\ (5)$$

المعادلتان (٤) ، (٥) يجب أن تكونا متطابقتين إذا كان الحل المقترح صحيحا ، وشرط ذلك هو أن تتحقق المعادلة :

$$-\,D\,\frac{2\,\lambda}{t}\left(1 - \frac{2\,\lambda\,x}{t}\right) = \frac{\lambda\,x^2}{t^2} + \frac{h^1(t)}{h\,(t)} \qquad \ldots..\ (6)$$

تتحقق هذه المعادلة فقط إذا كان :

$$h\,(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\lambda\ =\ \frac{1}{4\,D}$$

الطرف الأيمن من المعادلة يصبح باستخدام .... $<< h^1(t)\ = -\,\frac{1}{2\,t^3/^2}\ >>$

$$\frac{\lambda\,x^2}{t^2} - \frac{t^{1/2}}{2t^{3/2}} = \frac{\lambda\,x^2}{t^2} - \frac{1}{2t}$$

والطرف الأيسر يصبح :

$$-\,\frac{1}{4\,\lambda}\,.\,\frac{2\,\lambda}{t} + \frac{1}{4\,\lambda}\,.\,\frac{2\,\lambda}{t}\,.\,\frac{2\,\lambda\,x^2}{t}$$

$$= \frac{\lambda\,x^2}{t^2}\ -\ \frac{1}{2t}$$

أى أن المعادلة (6) تكون صحيحة تحت الشروط الآتية :

$f\,(x) = \text{constant} \neq\ 0$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\lambda = \frac{1}{4D}$$

ويكون حل معادلة الانتشار التفاضلية هو :

$$C = \frac{\propto}{\sqrt{t}} \exp\left(- \frac{x^2}{4Dt}\right) \qquad \ldots\ldots (7)$$

هذه المعادلة متماثلة على جانبى $x = 0$ ويمكن تعيين قيمة الثابت $\propto$ باستخدام المعادلة (١)

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} C \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\propto}{\sqrt{t}} e^{-x^2/t} \, dx$$

وبوضع $\zeta^2 = \frac{x^2}{4Dt}$ وبمعرفة أن التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

نحصل على :

$$d\zeta = \frac{dx}{(4Dt)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\propto}{\sqrt{t}} e^{-\zeta^2} \, d\zeta \, . \sqrt{4Dt} = S$$

$$\therefore S = 2 \propto \sqrt{D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} \, d\zeta = 2 \propto \sqrt{\pi D}$$

$$\therefore \propto = \frac{S}{2\sqrt{\pi D}}$$

ويكون الحل الكامل لمعادلة الانتشار فى بعد واحد هو :

$$C = \frac{S}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp - \frac{x^2}{4Dt}$$

عند رسم العلاقة البيانية بين التركيز C والمساف x بعد أزمنة مختلفة t ، من واقع الحل السابق ، نجد منحنيات تتطابق إلى حد كبير مع تلك التى نحصل عليها بالتجربة ، مما يحقق صحة الفروض والنتائج الرياضية السابقة .

الحيود عن قوانين فيك :

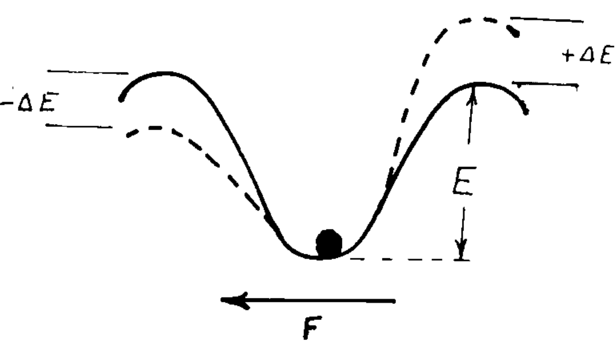
لا يصح تطبيق قوانين الانتشار لفيك فى بعض الحالات الآتية :

١ – عند انتشار ذرات الكربون فى فلز يحدث أن تتحد كميائيا ذرات الكربون مع ذرات الفلز محدثة كربيدات .

ومن البديهى أن ذرات الكربون التالية سيكون انتشارها فى كربيد الفلز وليس فى الفلز النقى .

٢ – عندما تكون الجزيئات المنتشرة لها شحنات أى أنها عبارة عن أيونات ، فإن وجود أى مجال قوة كهربائى وقت حدوث الانتشار يعوق أو يسارع من عملية الانتشارحسب نوع شحنة الجزىء << polarity >>

نفرض مجال قوة F يؤثر على المادة أثناء عملية الانتشار ، وأن اتجاه القوة F فى اتجاه الانتشار شكل (١٧ –٨) . يتوفر لكل أيون منتشر فى اتجاه القوة كمية من الطاقة $\Delta E = 1/2\ Fa$ حيث a هى المسافة التى يقطعها الأيون فى وحدة عملية الانتشار unit diffusion distance يسبب ذلك نقصا ظاهريا فى ارتفاع حاجز الطاقة فى اتجاه الانتشار بمقدار ΔE ، بينما يزداد ارتفاع هذا الحاجز فى الاتجاه المضاد بنفس المقدار ΔE



شكل (١٧ – ٨)

إذا كانت E هى طاقة تنشيط الانتشار أى ارتفاع حاجز الطاقة activation energy for diffusion ، وإذا كان υ هو التردد الذرى ، يكون درجة احتمال الانتشار للأمام .

Probability of diffusion in forward direction

$$= \upsilon \exp - (E - \Delta E) / kT$$

واحتمال الانتشار فى الاتجاه العكسى .

$$= \upsilon \exp - (E + \Delta E) / kT$$

ويكون الانتشار الفعلى فى الاتجاه الأمامى .

$$= \upsilon \exp - E/kT \left[e^{\Delta E/kT} - e^{-\Delta E/kT} \right]$$

$$= \upsilon \exp - E/kT \,.\, 2 \sinh \frac{\Delta E}{kT}$$

لكن إذا كانت ΔE صغيرة ، أى إذا كانت F صغيرة يكون $\sinh \theta = \theta$

فتصبح $\Delta E = 1/2 \; F a$

يصبح معدل الانتشار مساويا :

$$= \upsilon e^{-E/kT} \,.\, 2 \times 1/2 \, Fa / kT$$

$$= \upsilon \,.\, e^{-E/kT} \frac{Fa}{kT}$$

فى حالة إذا كان المؤثر هو مجال كهربائى E تكون القوة المؤثرة على الأيون هى :

$F = e E$

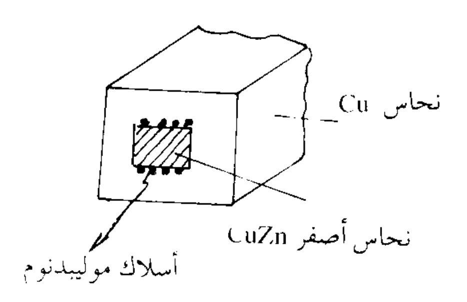
٢ - عندما تنتشر أيونات ثنائية الشحنة فى بلورات أحادية التأين مثلا انتشار أيونات الرصاص Pb^{2+} أو الكادميوم Cd^{2+} فى بلورات Ag Br لا يمكن أن يحل أيون ثنائى محل أيون أحادى الشحنة إلا إذا صاحب ذلك خلق فراغ مشحون ، vacancy حتى تحتفظ البلورة بتعادلها الكهربى الداخلى .

وبذلك يكون انتشار الأيونات الثنائية فى البلورات أحادية التأين مصحوبا بانتشار الفراغات أيضا $(Cd^{2+} + hole)$ ولذلك لا يصح تطبيق قانون فيك فى هذه الحالة .

أثر كيركندال Kirkendall effect :

أجرى كيركندال تجربة توضح الفرق بين الانتشار بواسطة التبادل والانتشار بالفراغات أو الذرات البينية .

نفرض أن الشبيكة تتكون من إطار من الخلايا تنتقل وتقفز الذرات بداخله أثناء عملية الانتشار .



شكل (١٧ - ٩)

لا يحدث أى تغير فى توزيع الذرات بالنسبة للإطار الشبيكى عند حدوث انتشار تبادلي ، ولكن لا يكون الأمر كذلك فى حالة الانتشار الفراغى أو بالذرات البينية حيث تزاح بعض الذرات بالنسبة للإطار الشبيكى ، كأن يكون هناك مثلا تيار من الفراغات من جانب إلى آخر عند وجود ميل لهذه الفراغات داخليا على انخلاع حدى مثلا ، أو على سطح حر بالبلورة . وضع كيركندال فى تجربته أسلاك من الموليبدنوم عند السطح الفاصل بين سبيكة من النحاس والزنك ، (النحاس الأصفر) ونحاس نقى ، وقد اختير الموليبدنوم بسبب انعدام انتشار ذراته تقريبا ، وبذلك يمكن اعتبار مواضع أسلاك الموليبدنوم كعلامات ثابتة فى المادة ، تؤخذ حركة الذرات فيها نسبة إليها (انظر شكل (١٧ - ٩) .

عند التسخين لدرجات حرارة مرتفعة تسمح بانتشار الذرات ، وجد أن العلامات تتحرك إلى الداخل من جميع الجهات ، مما يدل على أن ذرات الزنك تتحرك إلى الخارج جهة النحاس النقى أسرع من ذرات النحاس فى نفس الأتجاه ، فإذا كان الانتشار يتم بطريقة

التبادل المباشر للذرات ، فإن معاملات الانتشار لكل من النحاس والزنك تتساوى ، ولكن هذا لا يحدث ولذلك فمن المعقول أن يكون الانتشار بواسطة الفراغات إذ أن تبادل ذرة الزنك موضعها مع الفراغة يكون أسهل من تبادل ذرة النحاس مع الفراغة، ولذلك يكون انتشار الزنك إلى الخارج أسرع من انتشار النحاس فينتج عن ذلك نقص فى عدد ذرات الزنك فى سبيكة النحاس الأصفر فتنكمش ، ولذلك تقترب أسلاك الموليبدنوم من بعضها كما أثبتت التجربة العملية ، ويلاحظ هنا أن مصادر الفراغات - وكذلك أماكن تلاشيها - يكون بداخل المادة عند الانخلاعات الحدية والسطوح الحبيبية أو الحرة داخل البلورة .

مسائل علي الباب السابع عشر

١ – أوجد معامل انتشار الألومينيوم فى السيليكرن عند درجة $1300^{\circ}C$ علما بأن طاقة التنشيط للانتشار $73\ Kcal / mole$.

٢ – إذا كان معامل انتشار الليثيوم فى الجرامانيوم عند درجة $500^{\circ}C$ هو $10^{-6}\ im / sec$ أوجد مسافة الانتشار فى زمن ساعة .

٣ – اثبت أنه فى حالة الانتشار فى بعد واحد مع التغير المستمر فى ميل التركيز يكون تركيز المادة المنتشرة عند البعد × وبعد الزمن t هو

$$C(x,t) = \frac{\propto}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

حيث D معامل الانتشار .

وأوجد قيمة الثابت $\propto$ بدلالة الكمية الكلية للمادة المنتشرة .

٤ – اوجد حل معادلة فيك الثانية للانتشار فى بعدين .

الباب الثامن عشر
الخواص المرنة واللا مرنة للجوامد المتبلورة
Elastic and Anelasic Properties of solids

أولا : الخواص المرنة :

تقع أهمية معرفة معاملات المرونة للجوامد المتبلورة فى أنها تعطى الكثير من الضوء على قوى الترابط بين الذرات ، ولدراسة هذه المعاملات نبدأ أولا بتعريف للإجهاد وللإنفعال فى حالاتها العامة .

الانفعال :

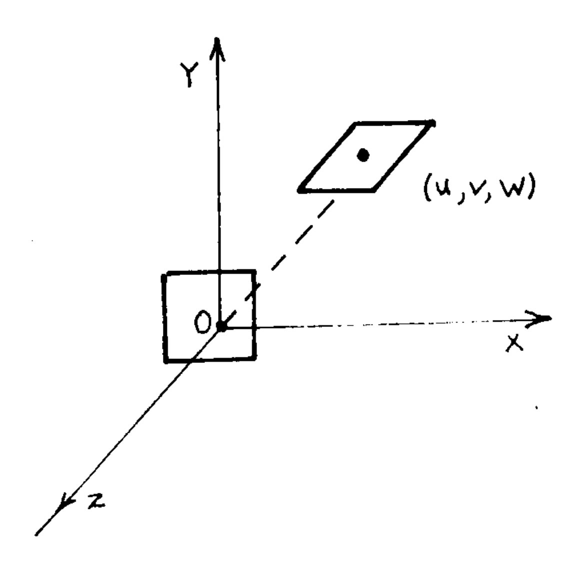
لتعريف مركبات الانفعال نعرف أولا متجه الإزاحة Displacement vector فإذا فرضنا عنصرا صغيرا داخل جسم ، شكل (١٨ - ١) وكانت إحداثياته قبل التأثير على الجسم بقوى خارجية هى (x, y, z) ، وأصبحت بعد ذلك (x + U,y + V,z + W) فإن المتجه (U, V, W) يسمى بمتجه الإزاحة ومركباته دوال للمتغيرات (x, y, z) ، وهـذا المتجه يبين الإزاحة الانتقالية التى حدثت لهذا العنصر ، بالإضافة إلى ما يمكن أن يكون قد حدث له من تغير فى شكله نتيجة تأثير القوة .

ويعرف متجه الإزاحة تماما بواسطة اثنا عشر معاملا على الشكل التالى :

$$U = U_0 + \frac{dU}{dx} X + \frac{dU}{dy} y + \frac{dU}{dz} z$$

$$V = V_0 + \frac{dV}{dx} X + \frac{dV}{dy} y + \frac{dV}{dz} z$$

$$W = W_0 + \frac{dW}{dx} X + \frac{dW}{dy} y + \frac{dW}{dz} z$$



شكل (١٨ - ١)

والمعاملات التفاضلية مأخوذة عند المركز 0

المتجه (U_0 , V_0 , W_0) يعطى إزاحة مركز الإحداثيات 0 الانتقالية بينما يعطى متجه آخر ليكن U^1 , V^1 , W^1 إزاحة كل جزء من أجزاء العنصر بالنسبة لمركز الإحداثيات الجديد بعد انتقاله ، وهذا المتجه يعطى تسعة معاملات تفاضلية .

$$\frac{dU}{dx}, \ldots\ldots \frac{dV}{dx}, \ldots\ldots \frac{dW}{dx}, \ldots\ldots$$

ويمكن وضع هذه المعاملات التسعة على الصورة الآتية ، وذلك ليسهل إيجاد تفسيرات فيزيائية مباشرة لها .

$$e_{xx} = \frac{dU}{dx} ; \quad e_{yy} = \frac{dV}{dy} ; \quad e_{zz} = \frac{dW}{dz}$$

$$e_{xy} = \frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy} ; \quad e_{yz} = \frac{dW}{dy} + \frac{dV}{dz}$$

$$e_{zx} = \frac{dU}{dz} + \frac{dW}{dx}$$

$$\omega_x = \frac{dw}{dy} - \frac{dV}{dz} ; \quad \omega_y = \frac{dU}{dz} - \frac{dW}{dx}$$

$$\omega_z = \frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}$$

فى حالة إذا ما كانت هذه المعاملات صغيرة فيمكن إعطاءها المعانى الآتية :

e_{xx} هو التغير النسبى فى طول خط ما فى الجسم يوازى أصلا محور السينات .
وبالمثل بالنسبة إلى e_{yy} ، e_{zz} وتمثل هذه الكميات الانفعال الطولى فى اتجاهات x,y,z كما تمثل : e_{yz} , e_{zx} , e_{xy} الانفعال القاص فى الاتجاهات الثلاثة ، ويعرف بالتغير فى الزاوية بين أزواج المحاور المتجاورة (y,z) , (z,x) , (x,y) . وذلك أثناء عملية التشويه أو الانفعال ، بفرض أن هذه المحاور ثابتة فى الجسم أثناء الانفعال .

الانفعال الحجمى هو التغير فى وحدة الحجوم من المادة . فإذا اعتبرنا مكعبا طول ضلعه الوحدة ، تصبح أبعاده بعد الانفعال هى :

$$(1 + e_{xx}) ، (1 + e_{yy}) ، (1 + e_{zz})$$

ويصير حجمه بعد الانفعال :

$$(1 + e_{xx}) \; (1 + e_{yy}) \; (1 + e_{zz}) = 1 + e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$$

ويكون الانفعال الحجمى وهو التغير النسبى فى الحجم هو :

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$$

الإجهاد :

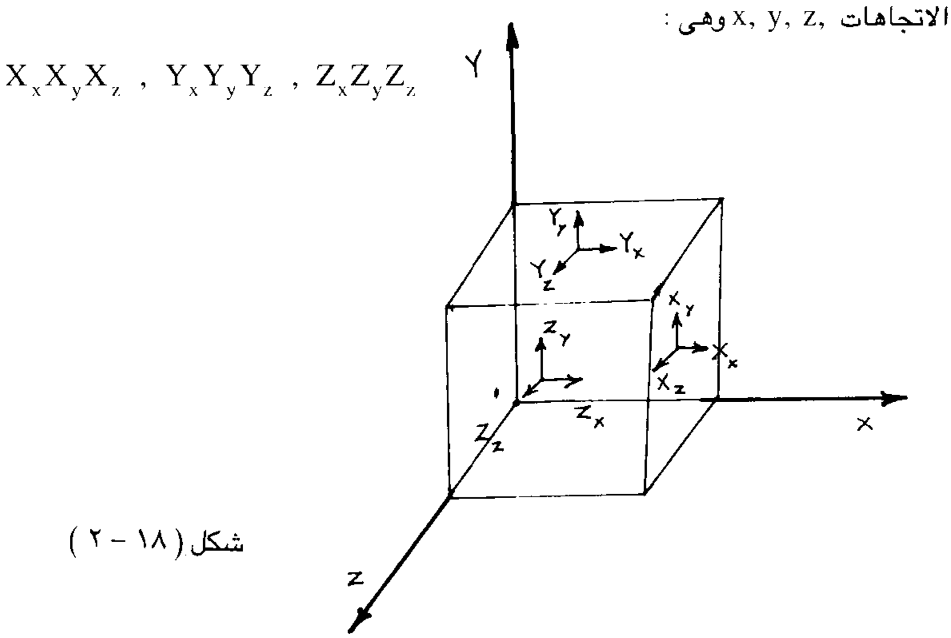
اعتبر جسما متزنا يقع عليه إجهاد ما ينتج عن ذلك قوى داخلية تؤثر على أية مساحة أولية dA داخل المادة ، بحيث يمكن اعتبار أن القوى التى تؤثر بها المادة على أحد جانبى هذه المساحة تتزن مع قوى مساوية لها مقداراً ، ويؤثر بها الجانب الآخر من المادة على نفس هذه المساحة .

ولإيجاد مركبات الإجهاد الداخلى عند أية نقطة فى الجسم المجهد نعتبر مكعبا أوليا $dx \; dy \; dz$ فى المادة كما فى شكل (١٨ - ٢) .

بما أن هناك إجهاداً واقع على هذا المكعب ، لذلك فإن المادة المحيطه به تؤثر عليه بمجموعة من القوى ، كما يؤثر هذا المكعب نفسه بقوى مساوية ومضادة لها نظرا لأنه متزن بالداخل ، ولا يتحرك فى أى اتجاه .

يمكننا تعريف هذه المجموعة من القوى تماما بواسطة تسعة مركبات تعمل فى الاتجاهات $x, y, z,$ وهى :

$X_x X_y X_z \; , \; Y_x Y_y Y_z \; , \; Z_x Z_y Z_z$



شكل (١٨ - ٢)

مركبات الإجهاد نسبة إلى محاور متعامدة $X_x Y_y Z_z$ تعمل عموديا على الثلاثة أسطح المتعامدة للمكعب ، وهى لذلك قوى شادة أو ضاغطة وفقا لاتجاهها بالنسبة للمكعب .

أما الستة مركبات الأخرى ، فهى قوى تعمل فى مستوى هذه الأسطح ، وهى لذلك قوى قاصة . ونظرا لأن المكعب فى حالة اتزان داخلى فهو لا يدور أو يتحرك داخل الجسم ، لذلك يجب استيفاء الشرط التالى :

$$X_y = Y_x \; , \; Y_z = Z_x \qquad , \qquad Z_x = X_z$$

أى أن هناك فقط ثلاثة مركبات للقوى القاصة يمثلها :

$X_y \;\; Y_z \;\; Z_x$

ويكون الإجهاد فى أعم صوره ممثلا بستة مركبات هى :

$X_x \quad Y_y \quad Z_z \quad X_y \quad Y_z \quad Z_x$

النظرية الخطية للمرونة :

وضع هوك نظريته التى تنص على أن مركبات الانفعال هى دوال خطية لمركبات الإجهاد وبالعكس ، ونحصل بذلك على مجموعتين من المعادلات تبين العلاقات بين مركبات الإجهاد والانفعال ، وذلك فى حالتها العامة وسنرى أنه يمكن استنباط الحالات البسيطة الخاصة من هذه المعادلات إذا ما وضعت الشروط الخاصة بكل حالة .

أما العلاقات العامة لقانون هوك هى :

$$e_{xx} = S_{11} X_x + S_{12} Y_y + S_{13} Z_z + S_{14} Y_z + S_{15} Z_x + S_{16} X_y$$
$$e_{yy} = S_{21} X_x + S_{22} Y_y + S_{23} Z_z + S_{24} Y_z + S_{25} Z_x + S_{26} X_y$$

. . . .

$$e_{xy} = S_{61} X_x + S_{62} Y_y + S_{63} Z_z + S_{64} Y_z + S_{65} Z_x + S_{66} X_y$$
$$X_x = C_{11} e_{xx} + C_{12} e_{yy} + C_{13} e_{zz} + C_{14} e_{yz} + C_{16} e_{zx} + C_{16} e_{xy}$$

. . . .

$$X_y = C_{61} e_{xx} + C_{62} e_{yy} + C_{63} e_{zz} + C_{64} e_{yz} + C_{65} e_{zx} + C_{66} e_{xy}$$

والثوابت . . . S_{11} , S_{12} , تعرف بثوابت المرونة ، كما تعرف القيم . . . , C_{11} , C_{12} بمعاملات المرونة ، ويوجد من كل نوع عدد ستة وثلاثون ثابتا تختصر عادة فى الحالات الخاصة البسيطة إلى أعداد أقل ، فمثلا فى حالة مادة لا تتوقف خواصها الطبيعية على الاتجاه (isoropic) مثل الزجاج فإننا نجد هناك معاملين فقط للمرونة هما : معامل المرونة الطولى (يونج) ومعامل القص ، ومن المعروف أنه توجد علاقة بين هذين المعاملين والمعاملات الأخرى المألوفة ، كمعامل المرونة الحجمية ، أو نسبة بواسون على الصورة الآتية :

$$Y = \frac{9\,K\,G}{3\,K + G}$$

$$Y = 2\,(1 + \upsilon)\,G$$

حيث Y معامل المرونة الطولى ليونج ، G معامل القص ، K معامل الانضغاط وهو مقلوب معامل المرونة الحجمى ، υ نسبة بواسون .

أما فى المواد الأكثر تعقيدا كما فى التركيبات ذات البنية البلورية ، فهناك عدد أكبر من هذه الثوابت . فبالنسبة للبلورات ذات البنية التكعيبية ، يوجد ثلاثة معاملات مرونة غير مترابطة ، تظهر فى العلاقات العامة لهوك كما يأتى :

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{vmatrix}$$

وبالنسبة للبلورات ذات البنية السداسية التركيب الشبيكى ، فلها عدد خمسة معاملات مرونة بيانها كالتالى :

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{vmatrix}$$

ثانيا : الخواص اللامرنة (Anelasticity) :

يضع هوك فى نظريته الخطية للمرونة شرطاً يجب توفره حتى يكون صحيحاً ما سبق كتابته من معادلات، وهذا الشرط هو أن يكون الإجهاد والانفعال داخل الحد المرن للجسم، أما إذا تعدى الإجهاد هذا الحد فإن الانفعال الحادث يصير انفعالا دائما لا يزول بزوال المؤثر ولا تنطبق عندئذ النظرية الخطية للمرونة.

المرونة وعامل الزمن :

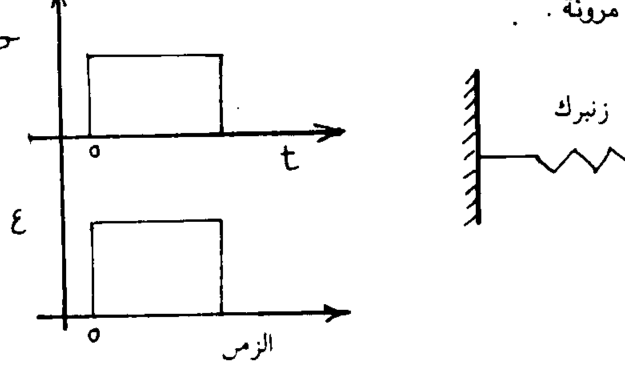
يلاحظ أيضا أن جميع قوانين المرونة الخطية لا تحتوى إطلاقا على الزمن كمتغير ، وهذا يعنى أنه عند التأثير بإجهاد على جسم ما ، فإن قيمة الانفعال تصل إلى نهايتها فى الحال ، وكذلك عند إزالة الإجهاد يختفى الانفعال تماما فى نفس اللحظة .

ويمكن تمثيل هذا الجسم الذى يطلق عليه الجسم تام المرونة ، يمكن تمثيله ميكانيكيا بزنبرك مرن يكون انفعاله e الحادث نتيجة لإجهاد σ واقع عليه ، كما هو مبين بشكل (١٨-٣) ويمكن وصفه بالمعادلة :

$$\sigma = a . e$$



حيث a يمثل معامل مرونة .



شكل (١٨ - ٣)

تحيد الأجسام الحقيقية فى التصرف عن هذا الجسم المثالى المرونة ، وذلك فى أنها تحتاج لبعض الوقت لكى يصل انفعالها المرن إلى قيمته المفروضة وفقا للنظرية الخطية للمرونة . وكان فويجت Voigt هو أول من سجل تلك الملاحظة من خلال بعض دراسات كان يجريها على خيوط تعليق ملفات الجلفانومترات . إذ وجد أنه عند توصيل التيار الكهربى يلزم انتظار بعض الوقت حتى يصل الانحراف فى الجلفانومتر إلى قيمته النهائية . كذلك عند قطع التيار لا تعود نقطة الضوء إلى وضعها الصفرى إلا بعد فترة من الوقت ، وهذا يعنى أن الانفعال الحادث يكون داخل الحدود المرنة لخيط التعليق ، ولكن يحتاج لبعض الوقت حتى يأخذ قيمته النهائية .

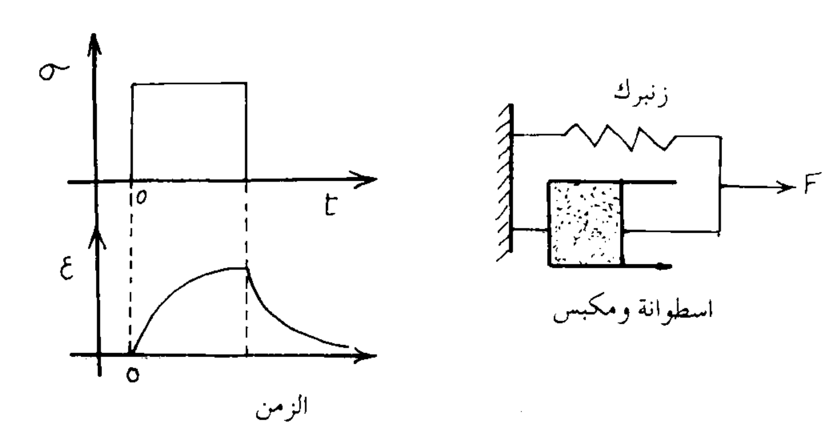
ومن هنا نشأت فكرة وجوب إدخال عامل الزمن في معادلات هوك للمرونة الخطية ، حتى تناسب حالة الجسم الحقيقي ، والذى سمى حينئذٍ بجسم فويجت (Voigt solid)

وسميت هذه الظاهرة بالمرونة المتخلفة أو اللامرونة :

(Elastic After effect - Anelasticity)

ولتعديل معادلات المرونة لهوك ، اعتبرنا أن الإجهاد لا يتناسب فقط مع الانفعال ، ولكنه يتناسب أيضا مع معدل التغير فى هذا الانفعال فتصير معادلة المرونة لجسم فويجت هى :

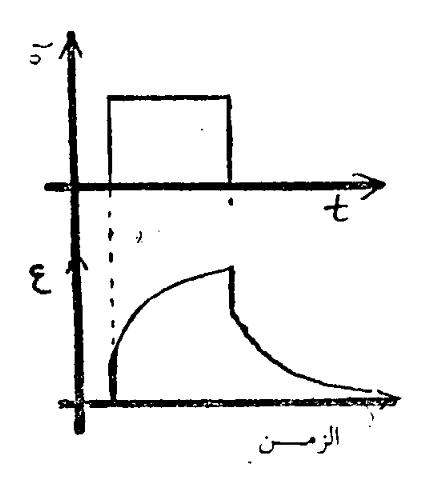
$$\sigma = a_1 \ e + a_2 \ \frac{d\,e}{d\,t}$$



شكل (١٨ – ٤)

وعلى ذلك يكون النموذج الميكانيكى والتمثيل البيانى لتغير الإجهاد والانفعال كما فى شكل (١٨ – ٤) .

لقد أدخل التعديل السابق فى معادلات المرونة إمكان تزايد أو تناقص الانفعال تدريجيا مع الزمن ، وحتى يصل لقيمته النهائية كما هو مبين بالشكل ولكن عند ملاحظة الأجسام الحقيقية بدقة أكثر ، وجد أن هناك انفعالا لحظياً يحدث عند لحظة التأثير بالإجهاد ، يعقبه بعد ذلك زيادة تدريجية للانفعال مع الزمن حتى تصل إلى قيمتها النهائية ويبين بشكل (١٨ – ٥) تغير الإجهاد والانفعال مع الزمن فى حالة الجسم القياسى الخطى. يلاحظ أن الانفعال اللحظى يمثله الزنبرك (٢) فى النموذج الميكانيكى .



شكل (١٨ – ٥)

معادلة الحالة الميكانيكية لجسم حقيقى Standard linear solid :

لوصف تغيير الإجهاد والانفعال فى الأجسام الحقيقية بشكل أكثر دقة ، نفرض أن كلا من الإجهاد ومعدل تغيره تتناسب طرديا مع الانفعال ومعدل تغيره كما هو مبين بالمعادلة:

$$a_1 \sigma + a_2 \frac{d\sigma}{dt} = b_1 e + b_2 \frac{de}{dt}$$

حيث b_2 b_1 a_2 a_1 ثوابت أربعة يمكن اختصارها إلى ثلاثة فقط بوضع المعادلة على الصورة :

$$\sigma + \tau_e \frac{d\sigma}{dt} = M_R \left(e + \tau_\sigma \frac{de}{dt} \right)$$

حيث τ_e ، τ_σ هما زمنى الإرخاء عندما يكون الانفعال والإجهاد ثابتين على الترتيب.

M_R ثابت يسمى معامل المرونة عند الإرخاء التام .

ولإيجاد تغير الإجهاد أو الانفعال مع الزمن نحل المعادلة السابقة أولا باعتبار الحل الخاص عندما يكون كل من $\frac{de}{dt}$, e يساوى صفرا

$$\therefore \ \sigma + \tau_e \frac{d\sigma}{dt} = 0$$

$$\therefore \ \sigma(t) = \sigma(0) \exp - t/\tau_\varepsilon$$

وإذا فرضنا بعد ذلك أن انفعالا قدره e_0 قد حدث فجأة عند بدء الزمن $t = 0$ ، فإن الإجهاد يتغير إرخائيا بزمن ارخاء τ_e ، وتكون قيمة الإجهاد النهائية هى $M_R \, e_0$ ، ويصبح الحل الكامل للمعادلة التفاضلية هو :

$$\sigma(t) = M_R \, e_0 + \left(\sigma_0 - M_R \, e_0 \right) \exp - t/\tau_e$$

وبتطبيق حالات الحدود Boundary conditions

أولا : عند $\therefore \ t = 0$

يصير $\sigma(0) = \sigma_0$

ثانيا : عند $t = \infty$

يصير $\sigma(\infty) = M_R \, e_0$

ويمكن بذلك رسم المعادلة السابقة بيانا كما فى شكل (١٧ – ٦)

وباستخدام نفس طريقة الحل يمكن إيجاد تغير الانفعال مع الزمن عند التأثير على الجسم بإجهاد ثابت وتصير المعادلة كالتالى :

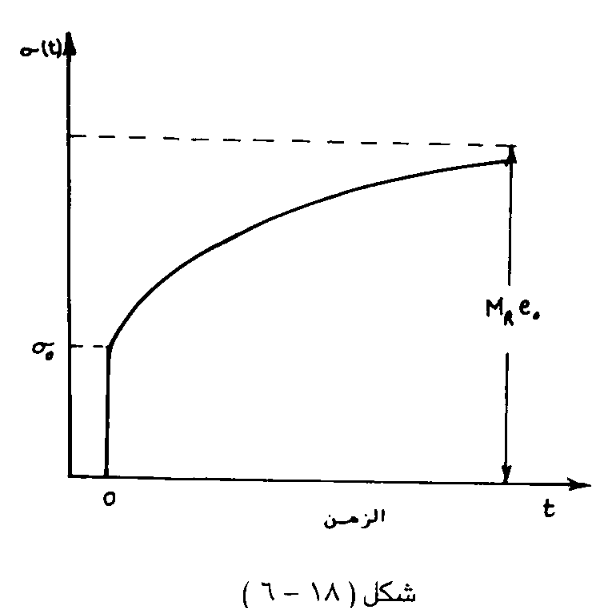
$$e(t) = M_R^{-1} \, \sigma_0 + \left(e - M_R^{-1} \, \sigma_0 \right) \exp - t/\tau_\sigma$$

العلاقة بين معاملى المرونة قبل وبعد الإرخاء :

نفرض أننا أثرنا على الجسم بإجهاد صغير $\Delta \sigma$ خلال فترة زمنية قصيرة dt ، تصير المعادلة التفاضلية لتغير الإجهاد مع الزمن هى :

$$\sigma \, dt + \tau_e \, d\sigma = M_R \left(e \, dt + \tau_\sigma \, de \right)$$

فإذا اعتبرنا أن الفترة الزمنية d t تؤول إلى الصفر تختصر المعادلة السابقة فتصبح:



شكل (١٨ - ٦)

تغير الإجهاد مع الزمن عند ثبوت الانفعال

$$\tau_e \cdot \Delta\sigma = M_R \cdot \tau_\sigma \cdot \Delta e$$

حيث $\Delta\sigma$, Δe هما الإجهاد والانفعال المصاحب عند لحظة البداية $t = 0$ ،

وتكون بذلك النسبة بين الإجهاد والانفعال هى معامل المرونة M_U عندما لا يكون هناك أى إرخاء :

$$\lim_{dt \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta e} = M_U = M_R \cdot \frac{\tau_\sigma}{\tau_e}$$

$$\therefore \frac{M_U}{M_R} = \frac{\tau_\sigma}{\tau_e}$$

ويعطى حيود الكمية $\frac{M_U}{M_R}$ عن الواحد الصحيح مقياسا للتغير النسبى فى الإجهاد أو الانفعال الذى يحدث أثناء العملية الإرخائية .

الاحتكاك الداخلى :

تعالج الجوامد عند دراستها بطرق ديناميكية ، بمعنى أن يكون الإجهاد المؤثر إجهادا دوريا وليس استاتيكيا ، ويكون الانفعال الحادث تبعا لذلك انفعالا دوريا أيضا وفقا للمعادلات :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp i\omega t$$
$$e(t) = e_0 \exp i\omega t$$

حيث σ_0 ، e_0 هما قيمتى السعة للإجهاد والانفعال الدوريين ، ω هى التردد وبالتعويض فى المعادلة التفاضلية التى تعرف مرونة الجسم الحقيقى نحصل على

$$(1 + i\omega\tau_e)\,\sigma_0 = M_R\,(1 + i\omega\tau_\sigma)\,e_0$$

أى أن .

$$\sigma_0 = M^* e_0$$

حيث

$$M^* = \frac{1 + i\omega\tau_\sigma}{1 + i\omega\tau_e} \cdot M_R$$

ويلاحظ أن النسبة $\frac{\sigma_0}{e_0}$ هى فى حد ذاتها معاملا للمرونة M^* ولكنه يحتوي بداخله كميات تخيلية $i = \sqrt{-1}$ يمكن تسميته بمعامل المرونة التخيلى ، وتعود أهمية هذا المعامل فى أنه يسمح لنا بتعيين مقدار الفقد فى الطاقة داخل النظام كنتيجة للعملية الإرخائية وتأخر الانفعال خلف الإجهاد بزاوية معينة ولتكن δ .

ظل زاوية التخلف $\tan\delta$ هو مقياس للفقد الداخلى فى النظام ويعرف بالاحتكاك الداخلى ويرمز له عادة بالرمز Q^{-1} وتوجد قيمته من المعادلة :

$$\tan\delta = Q^{-1} = \frac{\text{الجزء التخيلى من } M^*}{\text{الجزء الحقيقى من } M^*}$$

$$\therefore\ Q^{-1} = \frac{\omega (\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon \tau_\sigma}$$

وباستخدام المعادلة

$$\frac{M_U}{M_R} = \frac{\tau_\sigma}{\tau_e} = \frac{M_U - M_R}{M} = \frac{\tau_\sigma - \tau_e}{\tau}$$

تصبح معادلة الفقد فى الطاقة أو الاحتكاك الداخلى :

$$Q^{-1} = \frac{M_U - M_R}{M} \cdot \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$= \Delta \cdot \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

حيث .

$$\tau = \left(\tau_e \quad \tau_\sigma\right)^{1/2} \ \& \ M = (M_U \cdot M_R)^{1/2}$$

الحد الأول من المعادلة السابقة (Δ) يبين الفرق النسبى بين معاملى المرونة فى حالة الإرخاء وعدم الإرخاء ، أما الحد الثانى فى المعادلة فيعطى تغير الفقد الداخلى Q^{-1} مع تغير التردد ω ويلاحظ أن لهذا الحد قمة عظمى عندما يكون $\omega \tau = 1$

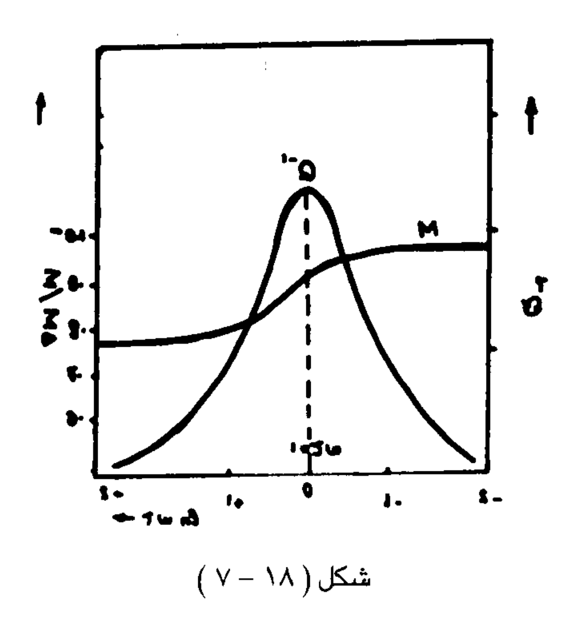
ويؤخذ عادة المتغير $x = \text{In} \ \omega \tau$ بدلا من $\omega \tau$ فتصبح بذلك معادلة الفقد هى :

$Q^{-1} = \frac{\Delta}{2} \text{ sech } x$ وتعطى هذه المعادلة : منحنى متماثل بالنسبة للمحور $x = 0$ عند رسم العلاقة بين Q^{-1} & x كما مبين بشكل (١٨ – ٧)

وتكون قيمة Q^{-1} عند قمة المنحنى هى :

$$Q^{-1}_{max} = 1/2 \ \frac{M_U - M_R}{M}$$

وواضح أنه بمعرفة موضع قمة منحنى الفقد على محور التردد يمكن مباشرة تعيين زمن إرخاء العملية من العلاقة : $\omega\tau = 1$



شكل (١٨ – ٧)

طيف الارخاء Relaxation Spectrum :

تنطبق العلاقات السابقة فى حالة وجود عملية إرخائية واحدة يطلق عليها : إرخائية ديباى يميزها طاقة تنشيط واحدة وزمن إرخاء واحد .

ولكننا كثيرا ما نجد أكثر من عملية إرخائية تعمل فى نفس منطقة الترددات المعنية بالدراسة .

وعندئذ ينطبق مبدأ التطابق لبولتزمان

Boltzmann superposition principle

وينص هذا المبدأ على أن تأثير العمليات الإرخائية المتطابقة يكون بالإضافة أى أن قيمة الفقد الكلى المقاس تساوى مجموع جميع الإضافات التى تحدثها كل عملية إرخائية على حدة .

ولكن من السهل فصل هذه العمليات الإرخائية عن بعضها ، وذلك بتغيير التردد أو درجة الحرارة . هذا وإن كان المعتاد هو تغيير درجة الحرارة لسهولة إحداث ذلك عن تغيير

تردد القوى المؤثرة ، إذ غالبا ما يحتاج ذلك إلى تغيير طريقة القياس ذاتها للانتقال من منطقة تردد معينة إلى منطقة أخرى فما يصلح للترددات البندولية لا يصلح للترددات الصوتية أو فوق الصوتية وهكذا .

وعلى ذلك فإن تغيير درجة الحرارة يحدث تغيرا فى زمن إرخاء العملية وفقا للمعادلة .

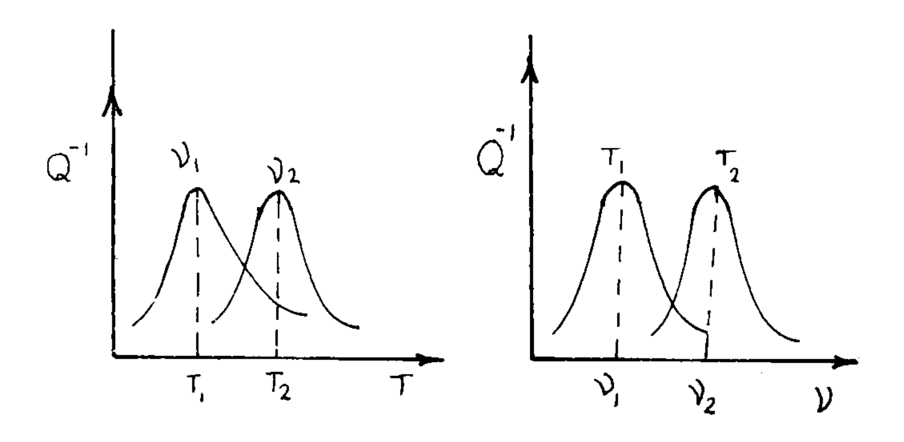
$$\tau = \tau_0 \exp E/kT$$

حيث E هى طاقة تنشيط العملية الإرخائية

و k هو ثابت بولتزمان .

و T هى درجة الحرارة المطلقة .

فإذا ما تم تعيين منحنيات الفقد Q^{-1} مع درجة الحرارة لعدد من الترددات υ_2 υ_1 كما فى شكل (١٨ - ٨) وبإيجاد موضع قمة كل منحنى على محور درجة الحرارة نكون بذلك قد أوجدنا العلاقة بين التردد الإرخائى ودرجة الحرارة ، وبرسم العلاقة البيانية بين لوغاريتم التردد مع مقلوب درجة الحرارة المطلقة نحصل على خط مستقيم شكل (١٨ - ٩) يكون ميله مساويا (E/k) .

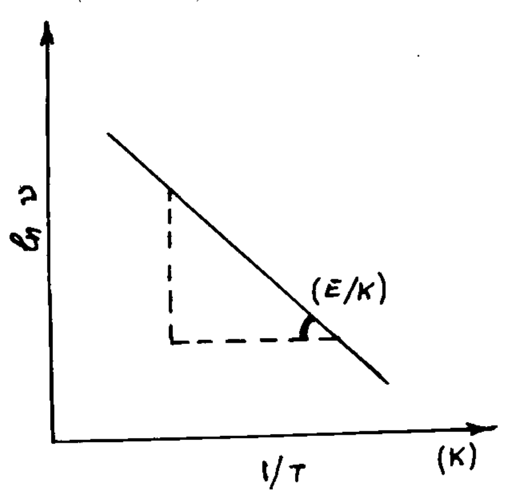


شكل (١٨ - ٨)

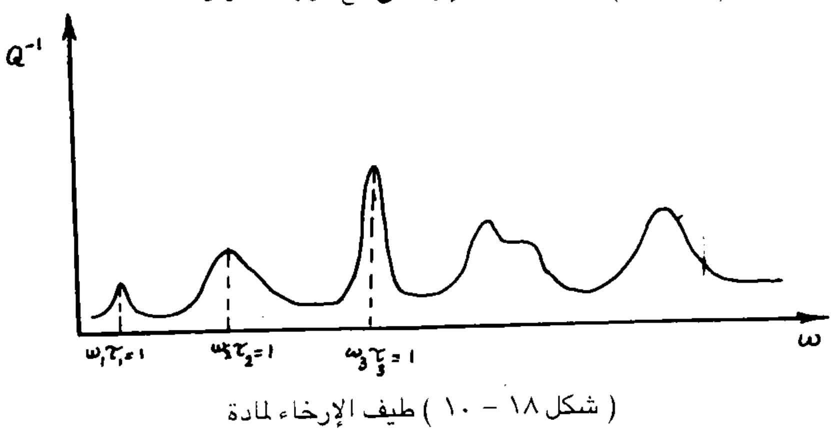
يبين إزاحة القمة الإرخائية بتغير التردد أو بدرجة الحرارة

وعندما نمسح منطقة الترددات للبحث عن العمليات الإرخائية تظهر قمم على محور

التردد يكون عند كل منها دائما $\omega\tau = 1$ وتسمى أحيانا كل قمة منطقة امتصاص ، وتسمى هذه المناطق مجتمعة بطيف الإرخاء انظر شكل (١٨ - ١٠)



شكل (١٨ - ٩) تغير التردد الإرخائى مع درجة الحرارة



(شكل ١٨ - ١٠) طيف الإرخاء لمادة

وتعتمد العمليات الإرخائية المختلفة التى تظهر كمناطق امتصاص فى طيف الإرخاء على التحركات الداخلية التأثيرية التى تنتج عن القوى الخارجية المؤثرة مع تخلف الانفعال عن الإجهاد .

هذه التغيرات الداخلية على المستوى الميكروسكوبى تنشأ عن إرخاء جهود ديناميكية حرارية . Thermodynamic potentials نتجت أصلا بتأثير القوة الخارجية ، وكأمثلة

لهذه العمليات الإرخائية :

١ - إرخاء ينشأ عن انتشار الطاقة الحرارية فى الأنظمة المرنة .

٢ - إرخاء ينشأ عن انتشار التيارات الدوامية فى الأنظمة المرنة .

٣ - إرخاء ينشأ عن انتشار الذرات أو الأيونات أو الالكترونات .

٤ - إرخاء ينشأ عن حركة أخطاء الشبيكة .

مسائل علي الباب الثامن عشر

١ - بلورة أحادية اسطوانية الشكل عليها إجهاد شد σ على طرفيها . إذا كان العمودى على مستوى انزلاق slip plane فى البلورة يعمل زاوية ϕ مع محور الاسطوانة وكان اتجاه الانزلاق فى مستوى يعمل زاوية λ مع هذا المحور ، أثبت أن إجهاد القص على مستوى الإنزلاق فى اتجاه الإنزلاق هو $\sigma \cos \phi \cos \lambda$.

٢ - إذا كان إجهاد القص للنحاس $10^6 \ n \ m^{-2}$ ما هو أقل إجهاد شد على بلورة أحادية من النحاس كالتى فى التمرين السابق يحدث تشويه قص .

٣ - اثبت أن الإجهادات σ_x^n , σ_y^n , σ_z^n التى تؤثر على مستوى تكون جيوب تمام الاتجاه direction cosines للعمود عليه هى $\propto, \beta, \gamma$ مع محاور الإسناد تعطى بالمعادلات:

$$\sigma_x^n = \propto \sigma_x + \beta \tau_{yx} + \gamma \tau_{zx}$$

$$\sigma_y^n = \propto \tau_{xy} + \beta \sigma_y + \gamma \tau_{zy}$$

$$\sigma_z^n = \propto \tau_{xz} + \beta \tau_{yz} + \gamma \sigma_z$$

٤ - أوجد الاستطالة فى قضيب طوله 10^{-1} m ومساحة مقطعه 10^{-4} m^2 يقع تحت تأثير قوة شادة مقدارها 0.1 n

ثوابت المرونة للألومنيوم

$$S_{11} = 15.9 \times 10^{-12} \ m^2 \ n^{-1}$$

$$S_{12} = -5.8 \times 10^{-12} \ m^2 \ n^{-1}$$

$$S_{44} = 35.2 \times 10^{-12} \ m^2 \ n^{-1}$$

الباب التاسع عشر

عيوب الشبيكة Lattice Defects

أولا : العيوب النقطية :

إذا تركت ذرة مكانها شاغرا فى الشبيكة تكون ما يسمى بالفراغه (أو الشاغرة) vacancy (شكل ١٩ – ١)

(شكل ١٩ – ١)

وإذا انحشرت الذرة بين ذرات الشبيكة سميت بالذرة البينية Interstitial atom والعيوب النقطية فى الشبيكة نوعان إما زوج فرنكل Frenkel pair أو شاغرة شوتكى Schottky كما مبين بشكل (١٩ – ١) .

١٩ – ١ الاتزان الحرارى لعدد الشواغر فى الشبيكة :

: Equilibrium concentration of vacancies

توجد دائما الشواغر بأعداد كبيرة فى البلورات فى حالة اتزان ديناميكى حراري ، ويزداد العدد كثيرا كلما ارتفعت درجة الحرارة .

لحساب عدد الشواغر عند درجة حرارة T°K فى بلورة ما نفرض أن هناك عدد N

موضع للذرات فى البلورة فى حالتها التامة . N atomic sites

نفرض أننا أدخلنا عدد n شواغر فى هذه البلورة ، يتغير تبعا لذلك كل من الطاقة الداخلية والأنتروبيا .

نحصل على وضع الاستقرار الحرارى بإيجاد الطاقة الحرة F free energy ثم نوجد أقل قيمة لها . minimize the free energy

نفرض أن الطاقة المصاحبة لكل شاغرة هى ΔE ، وأن الزيادة فى الأنتروبيا نتيجة لإدخالها فى الشبيكة هو ΔS .

عندما نمزج عدد n شواغر بعدد N ذرات فى الشبيكة فإن عدد الطرق الممكنة لهذا التوزيع هو :

$$\frac{N!}{(N-n)!\,n!}$$

ويكون احتمال الحصول على أى توزيع من هذه التوزيعات هو أنتروبيا التركيب Configurational entropy أو أنتروبيا المزج ويساوى :

$$p = k \log_e \frac{N!}{(N-n)!\,n!}$$

إذا كان تركيز الشواغر فى الشبيكة هو :

$$C = \frac{n}{N}$$

وباستخدام تقريب سترلنج

$$\log N! = N \log N - N$$

نحصل على أنتروبيا المزج

$$p = N [c \log c - (1 - c) \log (1 - c)]$$

الزيادة فى الأنتروبيا الذاتية intrinsic entropy نتيجة لإدخال عدد n شواغر هو n ΔS.

∴ التغير الكلى فى الأنتروبيا بإدخال n شواغر هو :

$$n \Delta S - N k (c \log c - \overline{1 - c} \log \overline{1 - c})$$

لكن الطاقة الحرة : $F = U - T\,S$

∴ التغير فى الطاقة الحرة للبلورة ، ويساوى الطاقة الحرة للشواغر

$$= N\Delta E - T\left[\,n\Delta S - Nk\,(c\log c - \overline{1-c}\;\log\;\overline{1-c}\,)\,\right]$$

بمفاضلة المقدار السابق بالنسبة لعدد الشواغر n ، ثم بمساواة الناتج بالصفر نحصل على وضع الاتزان الحرارى

$$\therefore\ \Delta E - T\Delta S + Tk\log\frac{c}{1-c} = 0$$

$$\frac{c}{1-c} = \exp -\left(\frac{\Delta E - T\Delta S}{kT}\right)$$

إذا كانت C صغيرة $\therefore\ 1 = 1 - c$

$$\therefore\ C = \exp\frac{\Delta S}{k}\,.\,\exp\frac{-\Delta E}{kT}$$

تعطى المعادلة السابقة عدد الشواغر فى حالة الاتزان الحرارى بدلالة طاقة التكوين ΔE لشاغرة الواحدة ، والتي تكتب على الصورة E_f

١٩ – ٢ حساب قيمة $e^{\Delta S/k}$

نستخدم قوانين الديناميكا الحرارية .

التغير فى الأنتروبيا لمجموعة هو

$$\Delta S = \int_0^T \frac{C_v}{T}\,dT$$

$$= \int_0^T \frac{1}{T}\left(\frac{dE}{dT}\right)_v dT = \frac{E}{T} + \int_0^T \frac{E}{T^2}\,dT$$

باستخدام نظرية أينشتين للطاقة الذرية فى المادة

$$E = 3\,kT\,\frac{x}{e^x - 1}$$

حيث $x = \dfrac{h\upsilon}{kT}$

υ هو التردد الذرى نحصل على :

$$\frac{\Delta S}{3k} = \frac{x}{e^x - 1} + x - \log(e^x - 1)$$

عندما تكون $x << 1$ يمكن تقريب المعادلة السابقة لتصبح

$$\frac{\Delta S}{3k} = -\log x = -\log \frac{h\upsilon}{kT}$$

$$\therefore \Delta S = -3k \log h\upsilon / kT$$

لتطبيق ما سبق على حالة شاغرة نفرض أن هناك عدد p جيران لها ، ولذلك نسقط العدد ٣ من المعالة السابقة والذى يدل أصلا على الثلاث درجات الحرارية x ,y ,z ونستبدل هذا العدد بالمقدار p وهو عدد التناسق .

أيضا عند إدخال شاغرة فى الشبيكة نجد أن التردد الذرى للذرات المحيطة بها يتغير من υ إلى υ^1 وبذلك يتغير الأنتروبيا بالمقدار

$$-pk \log \frac{h\upsilon^1}{kT} - \left(-pk \log \frac{h\upsilon}{kT}\right) = -pk \log \frac{\upsilon}{\upsilon^1}$$

ولكن تبعا لنظرية الحرارة الذرية يمكن تعريف ثابت جرونيزن

Gurneisen's constant

$$\gamma = -\frac{d \log \upsilon}{d \log V} = \frac{3V\alpha}{C_V K_T}$$

حيث V هو الحجم الذرى (atomic volume)

$\propto$ معامل التمدد الطولى

K_T معامل الانضغاط الأيسوثرمالى (ثابت الدرجة)

يصبح بذلك التغير فى الأنتروبيا نتيجة إدخال الشاغرة هو :

$$\Delta S = pk \log \frac{\upsilon}{\upsilon^1} = pk \int_{\upsilon}^{\upsilon^1} -\frac{d\upsilon}{\upsilon}$$

$$= - pk \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$$

لكن من ثابت جرونيزن

$$\gamma = - \frac{\delta \upsilon / \upsilon}{\delta V / V} = - \frac{V}{\upsilon} \cdot \frac{\delta \upsilon}{\delta V}$$

وبالتعويض

$$\therefore - \frac{\delta \upsilon}{\upsilon} = \gamma \frac{\delta V}{V}$$

$$\because \Delta S = p k \gamma \frac{\delta V}{V}$$

عند إدخال الشاغرة يتغير الحجم النسبى محليا بالمقدار :

$$\frac{1}{p} = \frac{p+1}{p} - 1 = ١ - \frac{\text{عدد الذرت قبل إدخالها}}{\text{عدد الذرات بعدها}}$$

$$\therefore \frac{\delta V}{V} = \frac{1}{p}$$

$$\Delta S = p k \gamma \cdot \frac{1}{p} = k \gamma$$

ويصبح بذلك عدد الشواغر التي تتزن حراريا عند درجة $T\ ^\circ K$ هى

$$C = e^{\gamma} \cdot e^{-E_f / k T}$$

وبالنسبة للمواد المعتادة نجد أن ثابت جرونيزن

$$e^{\gamma} = 1 \quad ; \quad \gamma = 0.5$$

ليصبح تركيز الشواغر عند الاتزان هو :

$$C = \exp - (E_f / k T)$$

فـإذا علمنـا أن طاقـة التكوين E_f للشـاغـرة تسـاوى حـوالى ١ إلكتـرون فـولط للمـواد المعتـادة كالنحـاس ، نجـد أن تركـز الشـواغـر عند درجـة ١٠٠٠ كلفن تقريبا أى بالقرب من نقطة الانصـهار يصبح ١٠$^{-٤}$ تقريبا .

١٩ - ٣ تعيين طاقة التكوين E_f للشواغر عمليا :

نختار عادة أحد القياسات الفيزيائية الحساسة للتغيرات التركيبية الداخلية Structure sensitive physical property P عند التبريد السريع لبلورة ما من درجة حرارة مرتفعة إلى أخرى منخفضة يتجمد بداخلها عدد كبير من الشواغر التي كانت في حالة اتزان ديناميكي حراري عند الدرجة المرتفعة ، وتتأثر تبعا لذلك الخاصية الفيزيائية تحت الاختبار ، فإذا فرضنا أن التغير الناتج في هذه الخاصية يرتبط مباشرة بعدد الشواغر المجمدة في الشبيكة نتيجة التبريد الفجائي Quenching فإن :

$$\Delta P = A \exp - E_f / kT$$

وبالتالي بدراسة تغير P مع درجة الحرارة T K ، ورسم العلاقة بين $\ln \Delta P$ مع $\left(\frac{1}{T}\right)$ نحصل على خط مستقيم يعطى ميله المقدار (E_f / k)

ويؤخذ عادة تغير المقاومة الكهربية مع عدد الشواغر إذ أنها حساسة لذلك ، كما يمكن قياسها بدقة كبيرة في درجات الحرارة المختلفة .

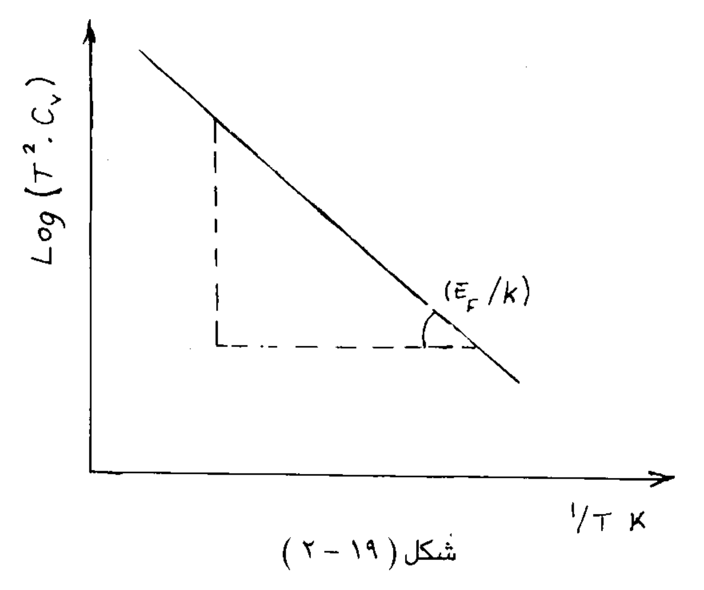
١٩ - ٤ تأثير الشواغر على الحرارة الذرية :

إذا كانت طاقة تكوين الشاغرة هو E_f تكون كمية الطاقة التى تكتسبها البلورة بإدخال شاغرة واحدة هى :

$$E_f \exp (- E_f / kT)$$

بمفاضلة المقدار السابق بالنسبة لدرجة الحرارة نحصل على الحرارة الذرية الإضافية نتيجة لإدخال الشاغرة .

$$\therefore C_V = \frac{Ef^2}{kT^2} \exp (- E_f / kT)$$



شكل (١٩ - ٢)

بإدخال عدد معقول من الشواغر فى الشبيكة ، ثم بقياس تغير الحرارة الذرية ، ورسم $\log\left(T^2 \ . \ C_V\right)$ مع $1 / T$ نحصل على خط مستقيم ميله E_f / k كما فى شكل (١٩-٢).

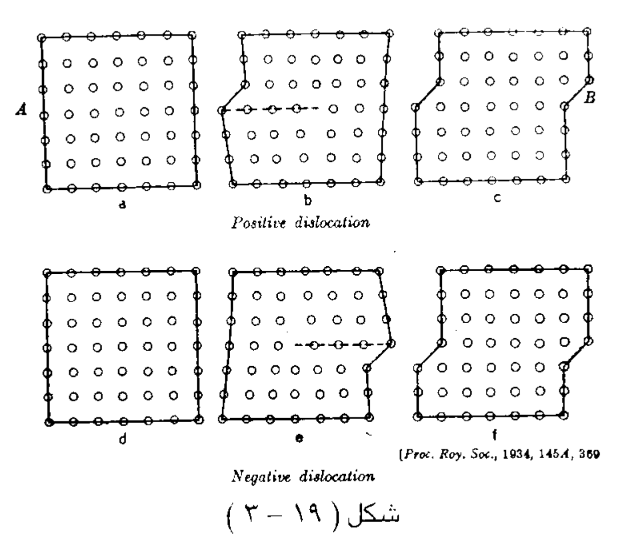
ثانيا : العيوب الخطية Dislocation :

١٩ - ٥ مقدمة :

إذا أثرنا بقوة ما ، شادة أو قاصة ، علي جسم ما فإنه يتشوه بانفعال مرن أو غير مرن حسب شدة القوة المؤثرة . يعود الجسم بعد الانفعال المرن الى ما كان عليه شكلا وحجما بعد إزالة القوة ، وإذا زادت القوة عن الحد المرن يحدث بالجسم انفعال دائم ، ينشأ عن انزلاق المستويات الذرية على بعضها البعض ، وتبدأ هذه العملية إذا وصل الإجهاد إلى قيمة تميز المادة وتسمى إجهاد القص الحرج critical shear stress σ_c .

يمكن تصور تشوه البلورات إذا اعتبرنا أن مرونة الجسم تعود إلى القوى البينية بين الذرات ، والتى تعمل على أن تحتفظ كل ذرة بمكانها فى نقطة شبيكة ، كما تحفظ للشبيكة ترتيبا معينا فى لوحدة الخلية تتكرر فى كل مكان بالبلورة ، فإذا اثرنا بقوة قاصة على

بلورة تزاح الذرات من مواضع اتزانها بقدر صغير إذا كانت القوة صغيرة وتعود الذرات ثانية إلى نفس مواضعها إذا أزيلت القوة وهذه هى خاصية المرونة ، أما إذا أزدادت القوة تكون الإزاحة كبيرة ، ولكن تنتقل إلى مواضع اتزان أخرى ، ويقال عندئذ إنه حدث انزلاق بلورى " slip " وتكون البلورة قد عدت حدها المرن ، ويبقى انفعال دائم بها بعد إزالة القوة ويبين شكل (١٩ - ٣) كيف يحدث الإنزلاق .



شكل (١٩ - ٣)

إذا حدثت وحدة انزلاق بالبلورة تصبح فى حالة تامة كما كانت سابقا إذ يظل عدد التناسق لكل ذرة كما كان قبل الإنزلاق ، أما إذا حدث إنزلاق جزئى بحيث يختلف عدد التناسق لبعض الذرات عما كان يقال : إن انخلاعا dislocation قد حدث وإن البلورة قد تشوهت بحدوث عيوب فى شبيكتها .

١٩ - ٦ الدليل العملى لوجود عيوب بالشبيكة البلورية :

(أ) كشف العيوب البلورية بالأشعة السينية rocking curve

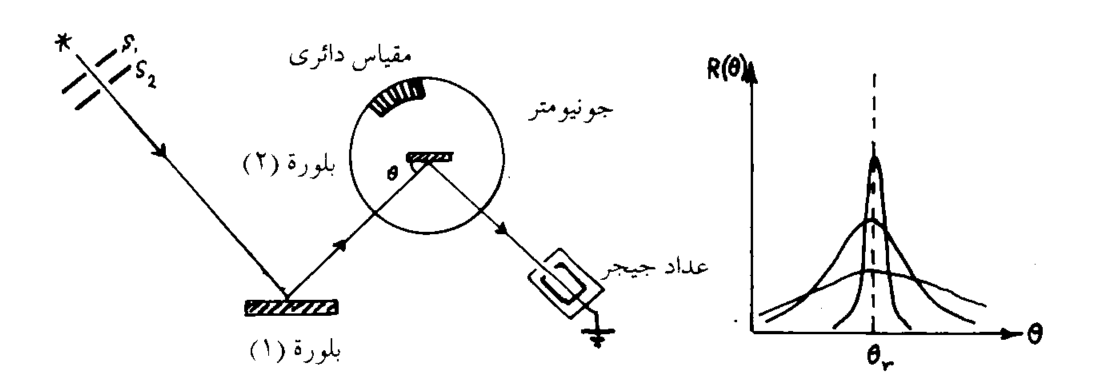
قدم حيود الأشعة السينية على بلورات المواد أول دليل عملى على وجود عيوب بالشبيكة ، فقد وجد اختلاف كبير فى شدة الأشعة السينية المنعكسة على مستيوات بلورية معينة عندما توجد بالحساب أو بالقياس ، والتجربة المستخدمة لدراسة درجة الكمال degree

of perfection لمستويات ذرية معينة فى البلورة تتركب من مصدر S للأشعة السينية يوضع أمامه حائلان بكل منهما شق ضيق يسمحان بخروج شعاع ضيق من الأشعة السينية التى تسقط على بلورة أحادية طول الموجة λ وفقا لقانون براج ، وتستخدم هذه الأشعة لدراسة المستويات الذرية ببلورة ثانية مثبتة على جونيرمتر ، ويمكن إدارة البلورة بزوايا صغيرة .

إذا سقطت هذه الأشعة بزاوية مماسية θ على مجموعة مستويات ($hk\ell$) فى البلورة البعد العمودى بينها $d(hk\ell)$ يحدث انعكاس إذا تحقق قانون براج

$$2\, d(hk\ell)\ \sin\ \theta = n\lambda$$

فإذا ما قيست شدة الأشعة المنعكسة $R(\theta)$ بدلالة الزاوية θ حول زاوية براج θ_r نحصل على منحنى كالمبين بشكل (١٩ – ٤) ، وقد وجد عمليا أنه كلما اقتربت البلورة من الحالة المثالية أو التامة كلما كان اتساع المنحنى صغيرا . أما إذا أحدثنا بعض التشوه اللدن بالبلورة يحدث اتساع أكبر للمنحنى مما يدل على عدم انتظام المستوى **كما** كان فى حالته المثالية .



شكل (١٩ – ٤)

٢ – اختلاف الخواص الميكانيكية لنفس المادة فى حالاتها المختلفة :

أما الدليل الثانى فيكمن فى الخواص الميكانيكية للجوامد ، فقد وجد أن قوة البلورات الحقيقية أضعف آلاف المرات عن قيمتها المحسوبة بالنظرية الكلاسيكية للمرونة ، فإذا

اعتبرنا مستويين ذريين A ، B المسافة العمودية بينهما d كما فى شكل (١٩ – ٥) وأثرنا عليهما بقوة قاصة σ ، ينزلق المستوى A على B عندما يصل σ إلى قيمته الحرجة σ_C وعندئذ تكون ذرات A قد أزيحت من مواقع اتزانها بمقدار $(d/4)$ ، ويلاحظ أنه عند $\frac{d}{2}$ تصير القوة القاصة صفرية القيمة حيث تتغير القوة

شكل (١٩ – ٥)

القاصة بشكل دورى بين نقط الشبيكة ويكون عندها طاقة الموضع أقل ما يمكن ، أى أن انتقال الذرة إلى موضع يبعد $\frac{d}{4}$ من موضع اتزانها يجعلها تنزلق بعد ذلك تلقائيا ، ولا تعود ثانية إلى وضعها الأول وتسمى هذه النقطة بنقطة الإذعان yield point وبالحساب التقريبى نجد أن $\frac{G}{4} = \sigma_C$ باعتبار أن انفعال القص $(x/d) = \theta$ وقيمته عند نقطة الإذعان هى $\frac{1}{4}$. أى أن إجهاد القص الحرج يساوى تقريبا $\frac{١}{٤}$ معامل القص للمرونة وقيمته للمواد المعتادة بين ١٠ ^{١٠} & ١٠ ^{١١} داين / سم ^{٢} .

والآن إذا نظرنا للقيم المقاسة للنسبة بين σ_C & G لنفس المادة فى حالاتها المختلفة نجد تباينا كبيرا كما هو مبين بالجدول لمادة الألومينيوم . ويعود الاختلاف الكبير فى القيمة G / σ_C للألومنيوم فى أشكاله المختلفة لأثر عيوب الشبيكة على الخواص الميكانيكية للمادة .

المادة	معامل القص G	إجهاد القص الحرج σ_C	G / σ_C
بلورة أحادية من ألومينيوم	2.5×10^{11}	4×10^{4}	60,000
ألومينيوم متعدد الحبيبات	2.5×10^{11}	2.6×10^{8}	900
ألومينيوم تجارى	$\sim 2.5 \times 10^{11}$	9.9×10^{8}	250
دور ألومين	$\sim 2.5 \times 10^{11}$	3.6×10^{9}	70

٣ - الخواص الاتجاهية للتدفق اللدن Anisotropy of plastic flow :

لقد وجد أن عملية الانزلاق فى البلورات الأحادية تتم دائما على مستويات أكثف رص للذرات فى الشبيكة كما أن اتجاه الانزلاق يكون فى اتجاه أكثف رص للذرات ، ففى حالة الشبيكة التكعيبية متمركزة الوجه f . c . c . يكون مستوى الانزاق هو :

(111) واتجاه الانزلاق هو : < 110 > بينما يكون هذا المستوى فى الشبيكة التكعيبية متمركزة الجسم b . c. c. هو : (110) ويكون اتجاه الانزلاق < 111 > ويبين شكل (١٩-٦) مستوى الانزلاق واتجاهه فى الشبيكة f . c . c. وكذلك مناطق الانزلاق كما تظهر تحت الميكروسكوب الميتالوجرافى لبلورة أحادية .

PROBLEM OF PLASTIC DEFORMATION



Cadmium crystal extended at 250° C



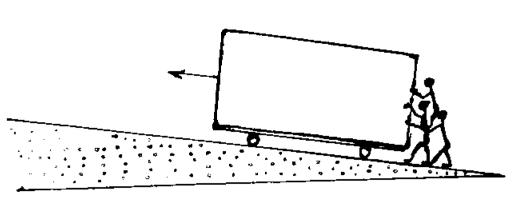
[From "Kristallplastizitat," Boas and Schmid

Zinc crystal extended at 300° C

شكل (١٩ - ٦)

ولتفسير حدوث انزلاق كبير على مستويات ذرية معينة دون غيرها كما تظهرها مناطق الانزلاق ، يفترض وجود عيوب شبيكة على هذه المستويات تسهل انزلاق جزء من البلورة

على جزئها الآخر وتشبه هذه العملية ما فعله قدماء المصريين شكله (١٩ - ٧) عند بناء الأهرامات فقد كان نقل الأحجار الثقيلة يتم بطريقة الانزلاق على مستويات مائلة يوضع عليها عصى رفيعة تسهل رفع الأحجار الثقيلة بقوة بشرية صغيرة ، شكل (١٩-٧).

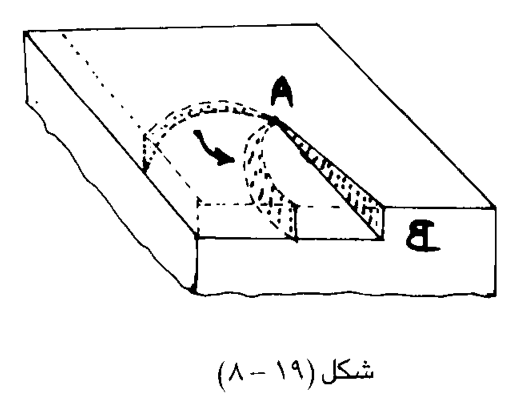


شكل (١٩ - ٧)

٤ - معدل النمو البلورى :

لوحظ من زمن بعيد أن معدل نمو البلورات أكبر كثيرا من المعدلات المحسوبة باعتبار البلورات التامة ، وأنه كلما كان هناك عيوبا بالمستوى الذى تنمو عليه البلورة كلما ازداد معدل النمو فى هذا الاتجاه ، وفى عام ١٩٤٩م فسر فرانك هذا النمو الشاذ للبلورات بوجود حافة AB على السطح الخارجي للبلورة (كما فى شكل (١٩ - ٨)) أوجدها عيب بلورى فى داخل البلورة ، وتنمو البلورة بدوران هذه الحافة عندما تترسب عليها الذرات من المحلول، وكل دورة كاملة من الحافة يرتفع سطح البلورة بمقدار مستوى ذرى وتعود الحافة إلى ما كانت عليه سابقاً وباستمرار دوران الحافة مع نمو البلورة يتكون ما يسمى ببلورة النمو الحلزونى .

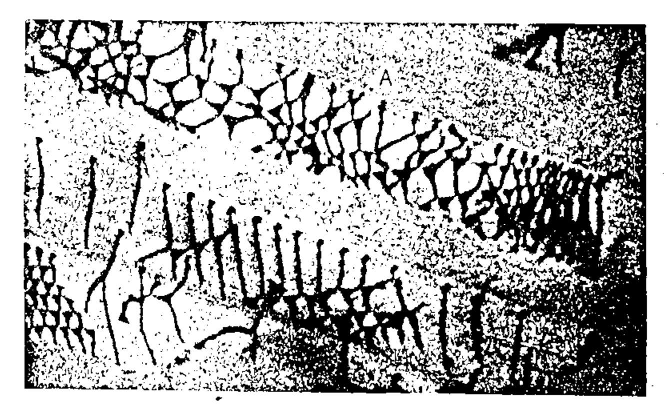
Helical growth spiral

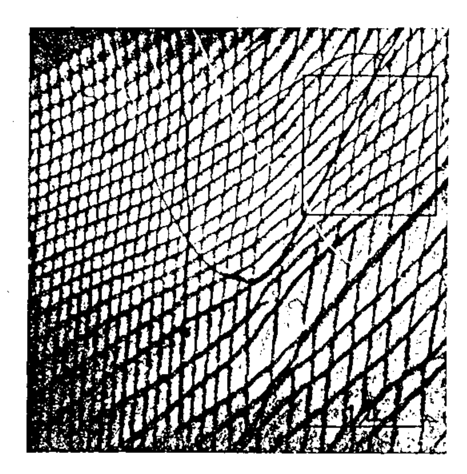


شكل (١٩ - ٨)

٥ – إظهار عيوب الشبيكة ميكروسكوبيا :

بعد اكتشاف قدرة الميكروسكوب الإلكترونى النفاذ Transmission electron microscope على كشف وتصوير التجمعات الذرية داخل البلورات، ظهرت فى صور هذا الميكروسكوب خطوطا سوداء لها أشكال معينة ، وقد فسرت هذه الخطوط بوجود عيوب شبيكة طولية ، يختلف عندها معامل الاستطارة الذرى للألكترونات عنه فى المناطق الخالية من العيوب ، وعلى ذلك فإن زيادة استطارة الألكترونات عند هذه العيوب تظهر خطوطا سوداء كما فى شكل (١٩ – ٩)





شكل (١٩ – ٩)

٦ - ظهور نهايات الانخلاعات على السطوح الخارجية للبلورات :

عند معالجة السطح الخارجى للبلورة بمحلول مخفف من حامض، يهاجم الحامض الأجزاء الضعيفة من البلورة ، وهى الأجزاء المحيطة بنهايات الانخلاعات حيث يوجد العيوب فى ترتيب الذرات وينشأ عن ذلك ما يسمى بحفرة التآكل Etch pit وشكلها هرمى رأسه داخل البلورة كما هو مبين بشكل (١٩ - ١٠) وإذا آثرنا بقوة تحرك الانخلاع من موضعه ، ثم إذا أعيد معالجة السطح بالحامض يأخذ الشكل الهرمى لحفرة التآكل الشكلين ب ، جـ حيث تتآكل القمة الهرمية تاركه شكلا مسطحا .

(أ) (ب) (جـ)

حفر التآكل

شكل (١٩ - ١٠)

١٨ - ٧ أنواع العيوب الخطية للشبيكة - الانخلاعات :

العيوب الأساسية فى الشبيكة البلورية نوعان :

١ - عيوب نقطية ، وتشمل : الفراغات والذرات البينية والشوائب ، ويمكن بتجميع مثل هذه العيوب ظهور عيوب سطحيه أو حجمية كما يحدث فى عملية الترسيب فى المحاليل الصلبة .

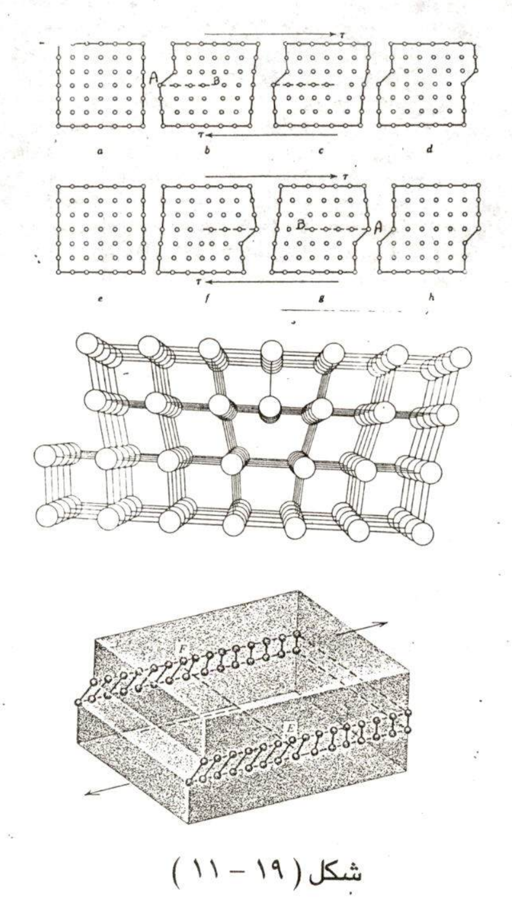
٢ - عيوب خطية ، وتسمى بالانخلاعات وهى نوعان : انخلاع حدى وانخلاع قص .

ويمكن أيضا وجود سطوح معيبة داخل البلورة نتيجة تجميع عدد من الانخلاعات على مستوى معين كما هو الحال فى الأجسام متعددة الحبيبات poly crystalline . فكل حبيبة هى بلورة احادية صغيرة ولكن يختلف اتجاه مستوياتها الذرية عن اتجاه مستويات الحبيبة المجاورة ، ويعتبر السطح الفاصل بينهما ، ويسمى بالحد الحبيبى ، grain boumdary يعتبر مكونا من عدد من الانخلاعات تترتب فى بعدين .

سنركز كلامنا فى هذا الجزء على العيوب الخطية وهى الانخلاعات .

١٨- ٨ الانخلاع الحدى :

اكتشف تيلور وأروان (Taylor and Orowan) عام ١٩٣٤ م الانخلاع الحدى ، ويتركب من خط فى البلورة ينقص عدد التناسق لجميع الذرات عليه بمقدار الواحد الصحيح عنه فى الأجزاء السليمة من البلورة ، ولكى نتصور كيف يتكون الانخلاع الحدى نعتبر بلورة تامة بلا عيوب ، ونؤثر عليها بإجهاد σ . ونفرض أن AB يمثل مستوى انزلاق بالبلورة (شكل ١٩ - ١١) . يحدث انزلاق كامل على المستوى على مرحلتين : يحدث أولا انزلاق جزئى ينحشر فيه مستوى ذرى أو أكثر بين المستويات الأخرى مكونا انخلاعا حديا . فإذا استمر الانزلاق حتى يخرج الانخلاع من الجهة الأخرى للبلورة تعود البلورة لحالتها التامة بلا عيوب ، ولكن يظهر على سطحها سلمتين كما هو مبين بشكل (١٩ - ١١) .

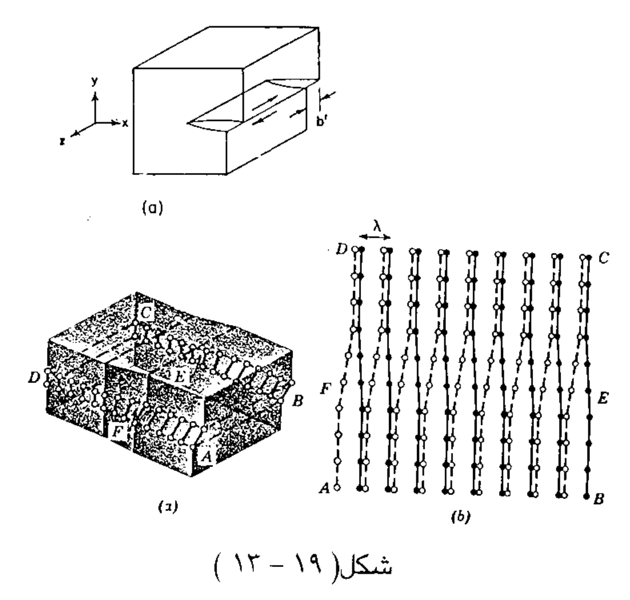


شكل (١٩ - ١١)

يتكون الانخلاع الحدى بالانزلاق الجزئى حيث يتكون خط عمودى على مستوى الورقة وعلى متجه الانزلاق تكون جميع الذرات عليه أقل بمقدار الواحد الصحيح فى عدد تناسقها مع جيرانها ، ويتحرك هذا الخط على مستوى الانزلاق AB . وتبين الصورة بشكل (١٩-١٢) مستوى ذريا به انخلاع حدى ، ولكى تراه واضحا انظر مماسيا للورقة .

١٨ - ٩ انخلاع القص :

بعد اكتشاف الانخلاع الحدى بأعوام قليلة وضع برجر Burger تصوره لانخلاع آخر سمى انخلاع القص يكون لذراته نفس عدد التناسق ، ولكن يتشوه الشكل الفراغى المكون من أقرب جيران ، ويحدث ذلك عند التأثير على البلورة بقوة قاصة تحدث فيها انزلاقا جزئيا كما هو مبين بشكل (١٩ - ١٣) .



شكل(١٩ - ١٣)

ويلاحظ فى حـالة انخـلاع القص أنه بالدوران حـول خط الانخـلاع AB نرتـفع أو ننخفض بمقدار متجه الإزاحة b حسب اتجاه الدوران ، وليس لانخلاع القص أى مستوى انزلاق كما فى الانخلاع الحدى ولذلك فيمكن له أن يتحرك فى أى اتجاه فى البلورة بينما لا يستطيع الانخلاع الحدى التحرك إلا فى مستوى انزلاقه .

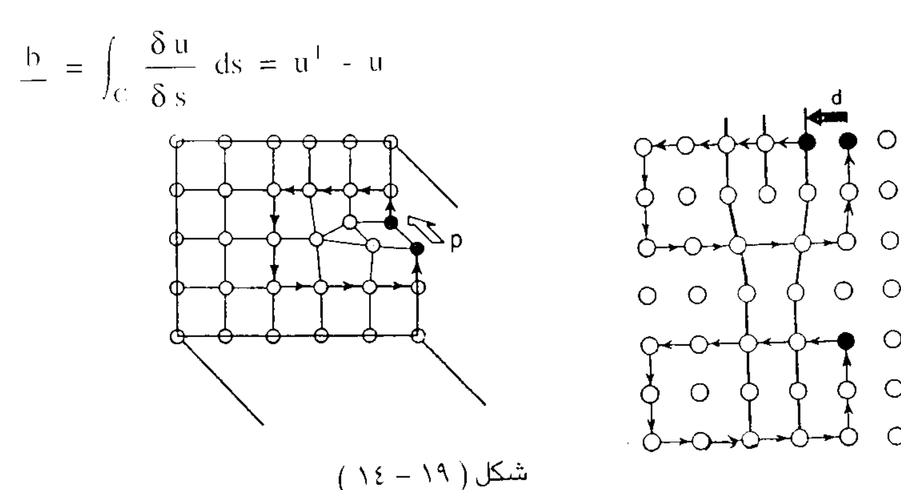
١٨ - ١٠ دائرة بورجر وشدة الانخلاع : Dislocation strength

يوصف الانخلاع عادة بمتجه يسمى متجه الإزاحة أو متجه بورجر Burger's vector . وللحصول على هذا المتجه نرسم حول الانخلاع دائرة بورجر وتتم بإجراء عدد متساو من الإزاحات الشبيكية فى كل من الاتجاهات الأربعة : يسار - أسفل - يمين - أعلى كما هو مبين بشكل (١٩ - ١٤) فإذا كانت الشبيكة داخل دائرة بورجر تامة وليس بها عيوب انطبقت نقطة البداية فى الدائرة على نقطة النهاية ، أما إذا احتوت دائرة بورجر على إنخلاع يكون المتجه b الذى يقفل الدائرة مميزا للإنخلاع مقدارا واتجاها .

ويمكن التعبير عن دائرة بورجر رياضيا باعتبار أية نقطة فى الشبيكة ولتكن u مثلا ثم نحدث إزاحات جانبية (S) $\vec{u}$ حول منطقة ما لتكوين حلقة نهايتها u^1 ينطبق طرفا الحلقة

إذا كانت الشبيكة تامة أما إذا لم تقفل الدائرة فإن المتجه الذى يقفلها هو متجه بورجر

$$\underline{b} = \int_c \frac{\delta u}{\delta s} ds = u^1 - u$$



شكل (١٩ - ١٤)

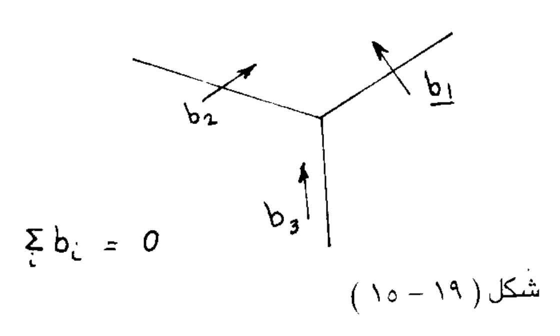
١٨ - ١١ خواص الانخلاع :

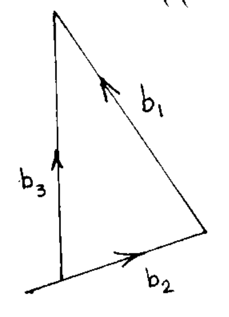
يميز الانخلاعات فى الشبيكة البلورية الصفات التالية :

١ - لا يمكن لأى انخلاع أن ينتهى بطرف حر ومطلق فى الشبيكة ، فإما أن يقفل على نفسه مكونا خية loop أو ينتهى طرفاه عند سطح حر داخلى أو خارجى فى البلورة .

٢ - يمكن تكون نظام شبكى من الانخلاعات فى البلورة ، فعندما يتقابل انخلاعين أو يتقاطعا تتكون عقده node تصبح نقطة تثبيت للانخلاع فى الشبيكة ، وينطبق قانون البقاء على متجهات بورجر للانخلاعات المتقابلة فى نقطة حيث يكون $\sum_i b_i = 0$

ويشبه هذا القانون قانون كيرشوف فى الكهربية للتيارات المتقابلة فى نقطة (انظر شكل ١٩ - ١٥)).





شكل (١٩ - ١٥)

٣ – كثافة الانخلاع فى بلورة تعرف بالطول الكلى للانخلاع فى وحدة الحجوم أى أن

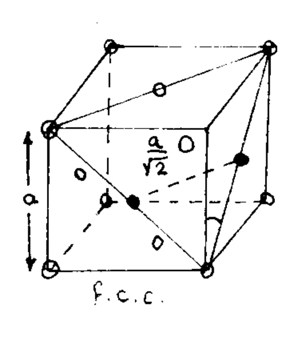
$\rho = L / V$

٤ – الطاقة الحرة للانخلاع دائما موجبة ولا يوجد أبدا الإنخلاع في حالة اتزان حرارى .

٥ – أى قوة مؤثرة على بلورة تعطى انخلاعات حدية أو قص أو الاثنين معا على شكل انخلاع عام له مركبه حدية وأخرى قص ، ولا يعتمد ذلك على سطح البلورة .

٦ – أى إجهادات داخلية فى البلورة يمكن تحليلها وترجيعها لوجود انخلاعات صغيرة .

٧ – التعريف بالانخلاع يتم بتحديد مقدار متجه بورجر واتجاهه ويكتب هكذا $[hkl]$ $\underline{b}^2$ حيث $\underline{b}$ هو مقدار متجه بورجر، $[hkl]$ اتجاهه ، أما لماذا يكتب مربع $\underline{b}$ فسنعرف فيما بعد أن طاقة الانخلاع تتناسب مع مربع متجه بورجر فمثلا فى بلورة f.c.c. يكون مستوى الانزلاق هو (111) واتجاه الانزلاق [110] والمسافة بين ذرتين متجاورتين على هذا المستوى هى $\frac{a}{\sqrt{2}}$ وعلى ذلك يعرف انخلاع الوحدة unit - dislocation فى البنية f . c . c. بالرمز $\frac{1}{2}[110]$ مع اعتبار البعد الشبيكى a يساوى الوحدة . شكل (١٩ – ١٦)



شكل (١٩ – ١٦)

١٨ – ١٢ طاقة الانفعال حول الانخلاع Strain energy of a dislocation :

اعتبر وسطا مرنا غير متجه الخواص isotropic به انخلاع قص . يكون متجه الإزاحة $\bar{u}$ لكل نقطة فى فراغ البلورة موازيا لخط الانخلاع ؛ لحساب طاقة الانفعال حول الانخلاع نوجد الشغل المبذول فى إزاحة كل ذرة من موضع اتزانها الأصلى إلى موضعها بعد الانخلاع ، يكون مجموع هذا الشغل لكل ذرات الوسط المحيط بالانخلاع هو طاقة الانفعال للانخلاع .

يجب أن تتوفر هنا ثلاثة شروط تمليها نظرية المرونة للأجسام

١ – أن يكون الجسم كله فى حالة اتزان ، ويستوفى هذا الشرط إذا كان :

$$(1 - 2 \upsilon) \, \Delta \, \bar{u} \; + \; \text{grad div} \, \bar{u} \; = \; 0$$

حيث υ هى نسبة بواسون .

٢ – إذا عملنا دائرة بورجر S حول الانخلاع فإن المتجه الذى يقفلها يكون متجه بورجر $\underline{b}$ حيث

$$\int_C \frac{\delta u}{\delta s} \, d \, S = \bar{u}_{M'} - \bar{u}_M = \underline{b}$$

٣ – ألا يكون هناك أى إجهادات على سطح البلورة أى أن

$$\sigma_{surface} = 0$$

وحل هذه المعادلات حلا رياضيا سليما ليس أمرا سهلا ، ولكننا نكتفى بالطريقة التقريبية التالية التى تعطينا نتائج مرضية تماما .

١٨ – ١٣ مجال الانفعال حول انخلاع قص :

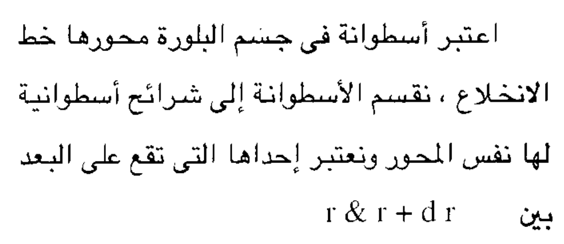
لا يوجد حول انخلاع قص أى ضغط هيدروستاتيكى كما هو الحال فى حالة الانخلاع الحدى ، ويتناسب الانفعال عند أى نقطة تناسبا عكسيا مع بعد النقطة عن الانخلاع ، فإذا كان $\underline{b}$ هو متجه بورجر للانخلاع AB فى وسط غير متجه الخواص فإن انفعال القص، ε ، على بعد r من الانخلاع يعطى بالمعادلة :

$$\varepsilon_r = \frac{b}{2 \pi r}$$ (انظر شكل (١٩ – ١٧)

ويفرض إمكان تطبيق نظرية هوك لمرونة الأجسام يكون الإجهاد الداخلى عند نقطة تبعد مسافة r من الانخلاع هو

$$\sigma_r = G \, . \, \varepsilon_r = G \, b / 2 \pi r$$

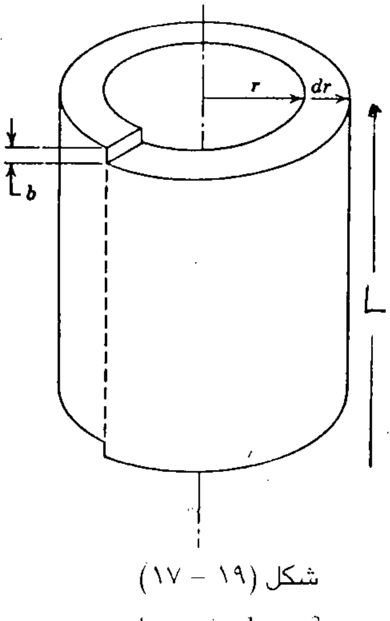
حيث G معامل المرونة للقص . ويتناقص الإجهاد بمعدل يتناسب مع مقلوب البعد عن



الانخلاع .

اعتبر أسطوانة فى جسم البلورة محورها خط الانخلاع ، نقسم الأسطوانة إلى شرائح أسطوانية لها نفس المحور ونعتبر إحداها التى تقع على البعد بين $r \,\&\, r + dr$

طاقة المرونة بالشريحة نتيجة للقص لوحدة الحجوم هى :



شكل (١٩ - ١٧)

$$\int \sigma \, d\varepsilon = \int G \varepsilon \, d\varepsilon = \frac{1}{2} G \varepsilon^2$$

وعلى ذلك تكون الطاقة المختزنة فى الشريحة :

$$dE = \frac{1}{2} G \left(\frac{b}{2 \pi r} \right)^2 . \, dV$$

حيث dV هو حجم الشريحة ويساوى

$$dV = 2 \pi r \, dr . L$$

حيث L هو طول الانخلاع (وهو هنا طول الأسطوانة)

نجرى عملية تكامل لجميع الشرائح بين البعدين $R \,\&\, r_0$

حيث r_0 هو لب الانخلاع dislocation core والذى لا يصح عنده تطبيق نظرية هوك للمرونة ، R هو المدى داخل البلورة الذى يتوقف بعده تأثير الانخلاع الانفعالى .

طاقة انخلاع القص لكل وحدة طول هى

$$E = \int_{r_0}^{R} \frac{G b^2}{2 \pi r} \, dr = \frac{G b^2}{4 \pi} \ln \frac{R}{r_0} \; / \; cm .$$

ويجب ألا نعتبر $r_0 = 0$ وإلا أصبحت قيمة E لا نهائية ونعتبر المادة داخل أسطوانة نصف قطرها r_0 (عادة تكون r_0 أقل من $2 \underline{b}$) هى لب الانخلاع ، ولتقدير طاقة الانفعال داخله نوجد الطاقة اللازمة لصهر هذا الجزء المعيب من البلورة ، فإذا كانت L_f هى الحرارة الكامنة للانصهار لكل ذرة تكون طاقة انصهار اللب لكل سم هى

$$w^1 = \frac{\pi (2b)^2 \times 1}{\Omega} \cdot L_f$$

حيث Ω هو الحجم الذرى ، $\underline{b}$ هو متجه بورجر ،

وعلى ذلك تكون طاقة انخلاع القص لكل وحدة طول هى

$$E = \frac{G b^2}{4\pi} \ln \frac{R}{r_0} + \frac{4 b^2}{\Omega} \cdot L_f$$

. وبالحساب نجد أن الحد الثانى من هذه المعادلة صغير القيمة جدا بالنسبة للحد الأول ، وعلى ذلك يمكن إهماله بدون خطأ يذكر .

كما أنه يمكن تقريب الحد الأول باعتبار أن قيمة R عادة لا تزيد عن ١٠٠ سم أى 10^{10} °A وان $r_0 \simeq 2$ °A ، وعلى ذلك تقترب قيمة $\ln \frac{R}{r_0}$ من القيمة 4π فى مقام الحد الأول .

وعلى ذلك تصير المعادلة $E \simeq G \cdot b^2$ هى معادلة طاقة الانخلاع ، ويمكن التحقق مع إثبات أن هذه المعادلة تنطبق أيضا على طاقة الانخلاع الحدى تماما كما هى صالحة لانخلاع القص .

ويمكن الحساب التقريبى لطاقة الانخلاع لكل سم كما يلى :

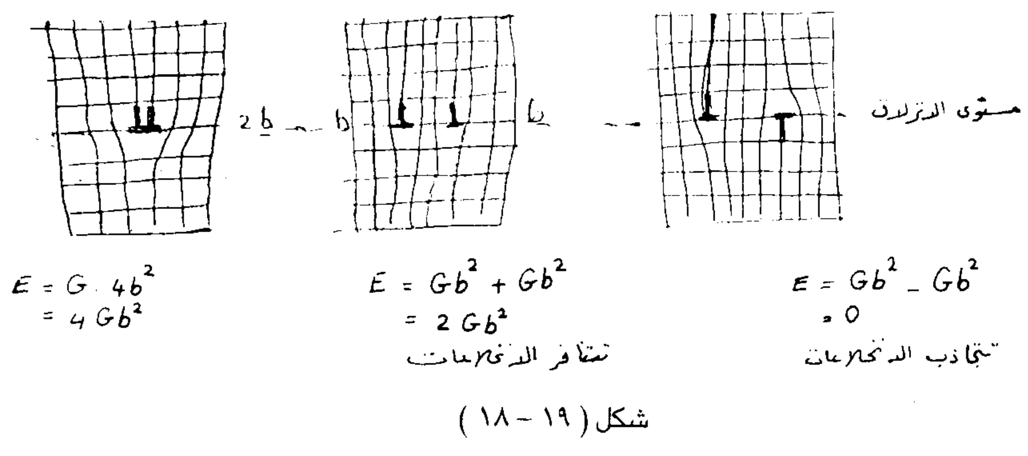
$\underline{b} \simeq 2 \times 10^{-8}$ cm ; $G \simeq 10^{11}$; $1\,eV = 1.6 \times 10^{-12}$ ergs

$$\therefore\ E = G b^2 = \frac{10^{11} \times 4\ 10^{-16}}{1.6 \times 10^{-12}} \simeq 2.5 \times 10^7 \ \ eV/cm$$

قيمة هذه الطاقة كبيرة جدا بالنسبة لطاقة التهيج الحرارى kT والتى تساوى عند درجة حرارة الغرفة حوالى 2.6×10^{-2} eV ، وعلى ذلك لا يمكن لطاقة التهيج الحرارى تكوين انخلاعات فى البلورة كما هو الحال فى حالة الفراغات التى توجد دائما فى حالة اتزان ديناميكى حرارى فى البلورة :

١٨ - ١٥ نتائج مترتبة على كبر طاقة الانفعال للانخلاع :

أولا : نتيجة لأن طاقة الانخلاع متناسبة مع مربع متجه بورجر لذلك فإن انخلاعا متجه بورجر له $2\underline{b}$ تكون طاقته متناسبة مع $4b^2$ بينما مجموع طاقتى انخلاعين منفردين متجه بورجر لكل منهما $\underline{b}$ هى $b^2 + b^2$ أى $2b^2$ فقط . واستنادا إلى قاعدة أقل طاقة حرة ، والتى تنص على وجوب أن تكون الطاقة الحرة لأى تفاعل أقل ما يمكن ، لذلك يتنافر كل انخلاعين لهما نفس الإشارة بينما ينجذب كل انخلاعين إشارتهما مختلفة ، وشكل (١٩-١٨) يوضح التفاعل البينى للإنخلاعات .



شكل (١٩ - ١٨)

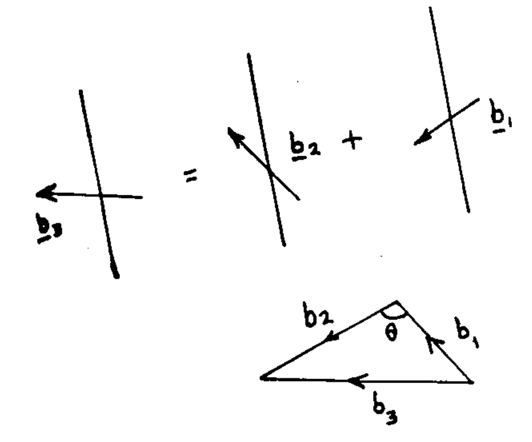
ثانيا : نتيجة أخرى لكبر طاقة الانخلاع لوحدة الأطوال ولكى تصير الطاقة الحرة للإنخلاع أقل ما يمكن يعمل خط الانخلاع على أن يكون طوله أقصر ما يمكن دائما ، ويؤدى ذلك إلى ظهور شد دائم فى خط الانخلاع line tension كما هو الحال فى سلك مرن مشدود ، وتعطى هذه الصفة لخط الانخلاع إمكانية الإهتزاز فى مجال إجهاد متردد ، ويتبع ذلك ظهور أنتروبيا للحركة .

ثالثا : اتحاد الانخلاعات أو تفككها يتم وفقا للقاعدة الآتية :

نفرض انخلاعين متجه بورجر لهما $\underline{b}_1$ & $\underline{b}_2$ بينهما زاوية θ شكل(١٩-١٩)

بتطبيق قاعدة جمع المتجهات يكون متجه بورجر المحصل لهما هو $\underline{b}_3$ حيث

$$\underline{b}_3 = \underline{b}_1 + \underline{b}_2$$



أما عن طاقة الانخلاع المحصل فنحصل عليها من مربعات متجهات بورجر فتكون طاقة الانخلاع المحصل (resultant) E مساوية

$$E = G\left(b_1^2 + b_2^2 + 2\,b_1\,b_2\,\cos\,\theta\right)$$

وهنا تظهر الحالات التالية :

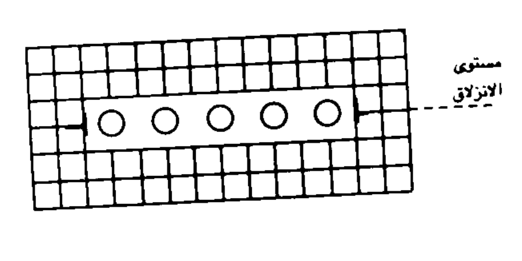
شكل (١٩ – ١٩)

١ – إذا كانت $\theta = 0$ وأن $b_1 = b_2 = b$ ،

أى فى حالة انخلاعين متماثلين لهما نفس الاتجاه ، تساوى الطاقة المحصلة لهما $4\,b^2$ وهذه القيمة أكبر من مجموع طاقتى الانخلاعين وهم فرادى ، ولذلك يحدث تنافر بينهما حتى لا تزداد الطاقة الحرة فى البلورة .

٢ – إذا كانت $\theta = 180$ نجد أن الطاقة المحصلة تساوى الصفر أى أن الطاقة الحرة تنقص ، ولذلك يحدث تجاذب بين الانخلاعين المتماثلين المختلفين الاتجاه مما يسبب تلاشيهما تماما من البلورة .

وإذا لم يكن للإنخلاعين نفس مستوى الانزلاق كما فى شكل (١٩ – ٢٠) يتلاشى الانخلاعين تاركين أما صفا من الفراغات أو صفا من الذرات البينية interstitial atoms .



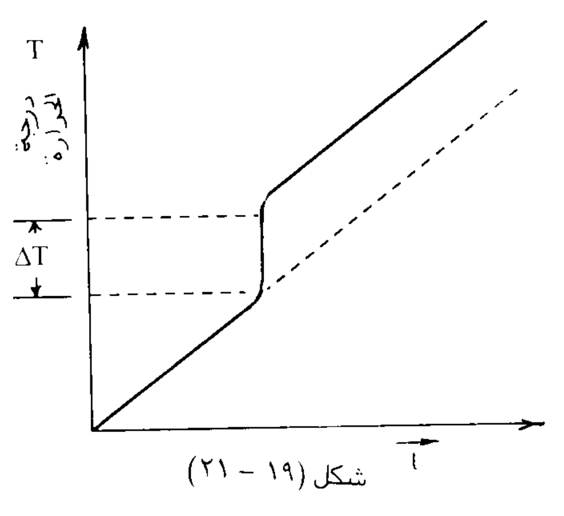
شكل (١٩ – ٢٠)

١٨ - ١٦ تعيين طاقة الانخلاع عمليا :

يستخدم المسعر الايسوثر مالى فى قياس كمية الطاقة المتحررة فى بلورة مشوهة نتيجة لتخميرها فى درجة حرارة مرتفعة حتى تتحرر كمية من الانخلاعات يمكن تحديد كثافتها بواسطة الميكروسكوب الالكترونى .

تسخين المسعر الايسوثر مالى يتم بمعدل ثابت حيث ترتفع درجة حرارته بمعدل ثابت ينتج عنه خط مستقيم فى منحنى التغير بين درجة الحرارة والزمن (كما فى شكل (١٩ - ٢٠)) .

عند وضع بلورة مشوهة تشويها لدنا فى المسعر وإعادة التسخين نحصل على كتف فى خط التسخين ينشأ عن تحرر عدد من الانخلاعات معطية طاقاتها للمسعر .



شكل (١٩ - ٢١)

من الزيادة فى درجة الحرارة ΔT وبمعرفة كتلة البلورة m وحرارتها النوعية C تكون كمية الحرارة التى تحررت هى $m . c . \Delta T$

وباستخدام الميكروسكوب المنفذ يمكن قياس كثافة الانخلاعات قبل وبعد عملية التسخين فى المسعر لمعرفة كمية الانخلاعات التى أزيلت بالتسخين . من ذلك نحصل على الطول الكلى للانخلاعات فى وحدة الحجوم والتى أزيلت خلال التجربة ، ومن معرفة كمية الطاقة التى تحررت يمكن إيجاد طاقة الانخلاع لوحدة الأطوال .

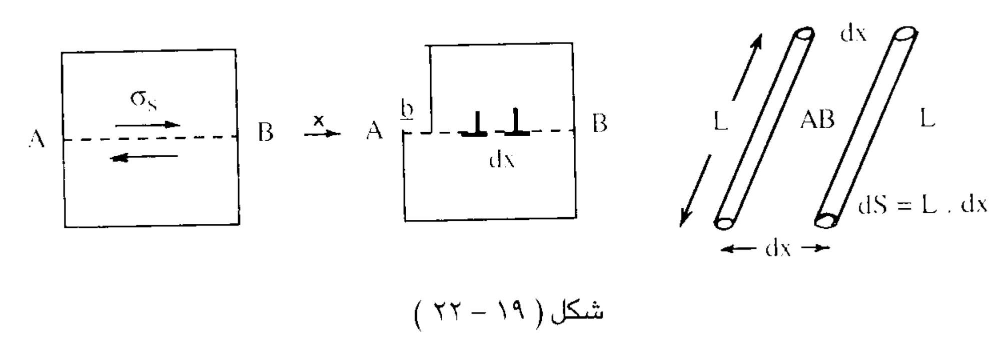
وقد أثبتت التجربة مطابقة القيم المقاسة عمليا بالقيم المحسوبة نظريا .

١٨ - ١٧ تكاثر الانخلاعات Multiplication of dislocations :

تتكون الإنخلاعات بتأثير إجهادات مرتفعة تزيد على إجهاد الإذعان للمادة ، كما يحدث عادة فى حالة التشوه اللدن plastic deformation ولكن يحدث تكاثر للانخلاعات فى

كثير من الحالات دون الحاجة لهذه الإجهادات المرتفعة . ويتم هذا التكاثر عن طريق إجهاد صغير ، يؤثر فى مستوى الانزلاق على الانخلاع بقوة تتسبب فى انزلاقه إذا كان حرا أو تقوسه إن كان مثبتا من طرفيه .

ولحساب القوة المؤثرة على الانخلاع لوحدة الأطوال نعتبر بلورة حيث A B هو مستوى انزلاق انخلاع حدى عليه كما هو مبين بشكل (١٩ - ٢٢) نتج عن التأثير على البلورة بإجهاد σ_s على مستوى الإنزلاق A B .



شكل (١٩ - ٢٢)

إذا أزيح الانخلاع مسافة dx فإنه يكتسح مساحة d S على مستوى الانزلاق . وإذا كان طول الانخلاع L تكون هذه المساحة هى $d S = L . dx$

القوة المؤثرة على الانخلاع لتحدث الانزلاق مساحة d S بواسطة الإجهاد σ_s هى :

$$F_s = \sigma_s . d S$$

وإذا كان $\underline{b}$ هو متجه بورجر فإن الشغل المبذول لهذه الإزاحة هو $dW = \sigma_s . ds . \underline{b}$

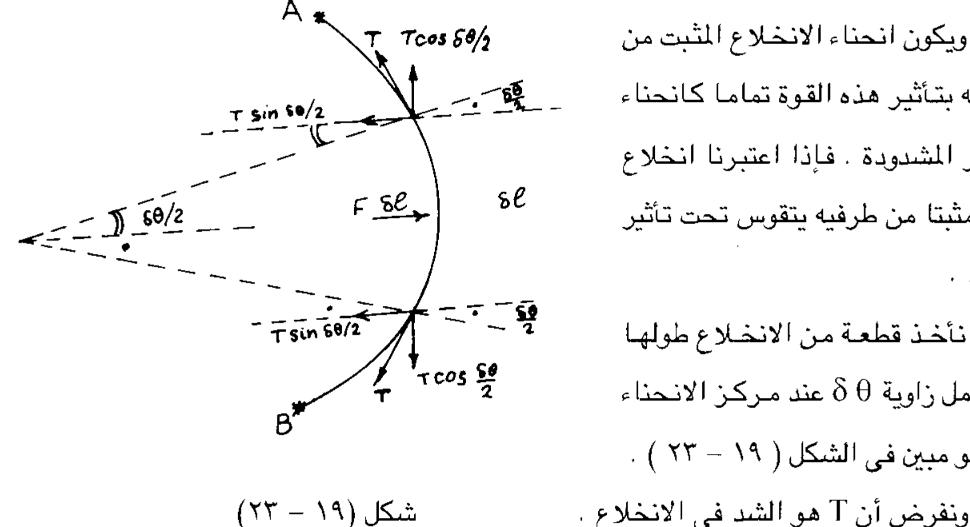
ومن ناحية أخرى اذا كانت القوة المؤثرة على الانخلاع لوحدة الأطوال منه هى F_L فإن الشغل المبذول من القوة لإزاحة الانخلاع مسافة dx هو $F_L . dx$ ويكون الشغل الكلى المبذول لطول L من الانخلاع هو $dW = F_L . L . dx$

وبذلك يكون $dW = \sigma_s . dS . b = F_L . L . dx$

ولكن $dS = L . dx$ وعلى ذلك يكون

$$F_L = \sigma . b$$

أى أن القوة على وحدة الأطوال من الإنخلاع تساوى قيمة الإجهاد على مستوى الانزلاق مضروبا فى متجه بورجر . وهذه القوة تكون دائما فى اتجاه عمودى على خط الإنخلاع .



ويكون انحناء الانخلاع المثبت من طرفيه بتأثير هذه القوة تماما كانحناء الأوتار المشدودة . فإذا اعتبرنا انخلاع AB مثبتا من طرفيه يتقوس تحت تأثير قوة F .

نأخذ قطعة من الانخلاع طولها $\delta \ell$ تعمل زاوية $\delta\theta$ عند مركز الانحناء كما هو مبين فى الشكل (١٩ – ٢٣) .

ونفرض أن T هو الشد فى الانخلاع .

شكل (١٩ – ٢٣)

وبتحليل القوة المؤثرة على هذا الجزء تكون القوة $F\,\delta\ell$ مساوية لمركبتى الشد فى الاتجاه الأفقى بينما يتلاشى مركبتى الشد $T\cos\dfrac{\delta\theta}{2}$ فى الاتجاه العمودى .

أى أن

$$F\,\delta\ell = 2\,T\sin\delta\theta/2$$

وإذا كانت $\delta\theta$ صغيرة فإن

$$\therefore\ F = T\left(\frac{\delta\theta}{\delta\ell}\right)_{\delta\theta\longrightarrow 0}$$

ومن تعريف نصف قطر الانحناء ρ فإن

$$\rho = \mathrm{Lim}_{\delta\theta\longrightarrow 0}\left(\frac{\delta\ell}{\delta\theta}\right)$$

ومن طاقة الانخلاع فإن الشد فيه يساوى

$$T = G\,b^2$$

وعلى ذلك فإن :

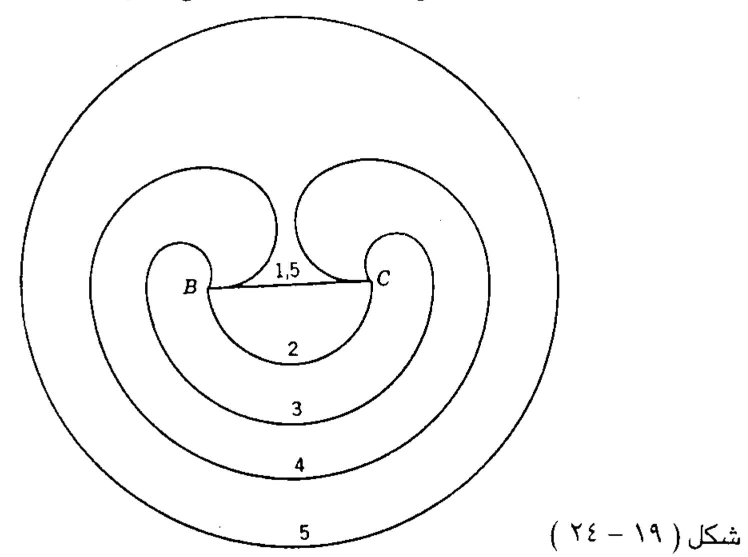
$$\rho = \frac{G\,b}{\sigma}$$

أى أن نصف قطر الانحناء يقل كلما ازداد الاجهاد على مستوى الانزلاق . أى أن الانخلاع يزداد تكورا كلما إزداد الإجهاد عليه .

مصدر تكاثر الانخلاع لفرانك وريد Frank - Read source :

اعتبر الجزء من الانخلاع المثبت من طرفيه عند B,C عند التأثير بإجهاد σ تكون القوة المؤثرة على خط الانخلاع هى σ .b حيث b هو متجه بورجر ، ويتوقف نصف قطر انحناء خط الانخلاع على الإجهاد σ .

إذا زيد الإجهاد تدريجيا ، وازدادت القوة المؤثرة على الانخلاع بالتبعية يزداد تقوس خط الانخلاع حتى يصبح نصف دائرة كما هو مبين بشكل (١٩ - ٢٤) وبعدها يصبح الوضع غير مستقر فيتمدد الانخلاع باطراد كما مبين حتى يتقابل فرعا الانخلاع



شكل (١٩ - ٢٤)

ويكون عندئذ متجهى بورجر للفرعين المتقابلين فى اتجاهين متضادين فيلاشى أحدهما الآخر ، وينتج عن استمرار التمدد حلقة دائرية من الانخلاع يعود بعدها خط الانخلاع الأصلى B C. إلى ما كان عليه ، ويعيد الكرة مرة بعد أخرى مكونا حلقات متتالية من

الانخلاعات .

ويتسبب خروج هذه الانخلاعات المتتالية لسطح البلورة فى ظهور ما يسمى بمنطقة انزلاق slip band تجعل من مستوى الانزلاق الموجود عليه مصدر فرانك وريد للتكاثر مستوى نشط ، بخلاف المستويات الذرية الأخرى التى لا تظهر أى انزلاق .

مسائل علي الباب التاسع عشر

١ – كم من السعرات تتحرر نتيجة زوال الانخلاعات من 20 cc من النحاس المشغل على البارد cold -worked عند تخميره فى درجة حرارة مرتفعة إذا كانت الكثافة الابتدائية للانخلاعات 6×10^{11} cm^{-2} . اعتبر أن طاقة الإنخلاع هى 1 e V لكل طول 1 °A .

٢ – بلورة أحادية من النحاس بها حد مزاح ذو زاوية صغيرة low angle tilt boundany على المستوى (010) ومحور الإزاحة tilt axis يوازى الاتجاه [001] .

أوجد زاوية الإزاحة إذا كان البعد بين كل انخلاعين فى المستوى 1.5×10^{-6} m

٣ – أوجد قيمة الإجهاد الحرج الذى يبدأ فى تشغيل مصدر فرانك وريد لتكاثر الانخلاع إذا كان طول فرع شبكة الانخلاعات بالبلورة هو 10^{-4} cm ومتجه بورجر . $b = 2.5 \times 10^{-8}$ cm

(معامل القص للبلورة $G = 2 \times 10^{11}$ dynes / cm^2)

النظام الدولي للوحدات

المتر : طول مسار الضوء فى الفراغ لمدة (458 792 1/299) من الثانية .

الكيلو جرام : وحدة الكتلة .

الثانية : المدة الزمنية التى تعادل (9192631770) دورة إشعاع بين المستويات الدقيقة الأرضية للطاقة فى ذرة سيزيوم ١٣٣ .

الأمبير : هو التيار الذى إذا مر فى سلكين لا نهائيين ومتوازيين فى الفراغ تحدث بين السلكين قوة تساوى $2 \times 10^{-7}\ N\ m^{-1}$

كلفن : وحدة الدرجة الترموديناميكية وتساوى (1/273.16) من الدرجة الترموديناميكية للنقطة الثلاثية للماء .

المول : كمية المادة فى نظام يحتوى على مكونات أولية كعدد الذرات فى (0.012kg) من الكربون ١٢ .

كاندلا : الشدة الضيائية فى اتجاه ما من مصدر إشعاع أحادى اللون تردده $(540 \times 10^{12}\ Hz)$ وتكون شدته الإشعاعية فى هذا الاتجاه (1 / 683) واط لكل ستريديان .

$\pi = 3.141\ 592\ 653 ....$

$e = 2.718\ 281\ 828 ...$

$\ln 10 = 2.302\ 585\ 092 ..$

1 in = 25.4 mm   1 lb = 0.453 kg

1 ft = 0.3048 m   1 cal = 4.184 J

1 mile = 1.609344 km

الثوابت الفيزيائية الأساسية

الكميــة	الرمز	القيمــة
سرعة الضوء فى الفراغ	C	$299\ 792\ 458\ ms^{-1}$
قابلية الفراغ permeability	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ N\ A^{-2}$
نفاذية الفراغ permittivity	$\in_0$	$8.85 \times 10^{-12}\ F\ m^{-1}$
ثابت نيوتن للجاذبية	G	$6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$
ثابت بلانك	h	$6.626 \times 10^{-34}\ J\ s$
شحنةالإلكترون	e	$1.6 \times 10^{-19}\ C$
كمة الفيض المغنطيسى (h/2e)	ϕ_0	$2.07 \times 10^{-15}\ wb$
نسبة تردد إلى فولط جوزيفن	2e/h	$4.83597 \times 10^{-14}\ HzV^{-1}$
مقاومة هول المكماة (h / e^2)	R_H	$25812.8\ \Omega$
ثابت ريدبرج	R_∞	$10973731\ m^{-1}$
نصف قطر بوهر	a_0	$0.529177 \times 10^{-10}\ m$
نصف قطر الإلكترون	r_e	$2.818 \times 10^{-15}\ m$
بوهر ماجنتون $(eh / 2\ m_e)$	μ_B	$9.274 \times 10^{-24}\ J\ T^{-1}$
كتلةالإلكترون	m_e	$9.109 \times 10^{-31}\ kg$
كتلةالبروتون	m_p	$1.6726 \times 10^{-27}\ kg$
كتلةالنيوترون	m_n	$1.6749 \times 10^{-27}\ kg$
ثابت أفوجادرو	N_A	$6.022 \times 10^{23}\ mol^{-1}$
ثابت فاراداى	F	$96485309\ C\ mol^{-1}$
ثابت الغاز الجزيئى	R	$8.31451\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$
ثابت بولتزمان (R/NA)	k	$1.38 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$
ثابت ستيفان – بولتزمان	σ	$5.67 \times 10^{-8}\ wm^{-2}\ K^{-4}$

عجلة الجاذبية للسقوط الحر	g	$9.80665 \ m\,s^{-2}$
الضغط الجوى القياسى	atm	101325 Pa
وحدة الكتلة الذرية (a.m.u)	a.m.u	1.66×10^{-27} kg
الإلكترون فولط	eV	1.602×10^{-19} J

بعض التكاملات القياسية

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = 1/2 \sqrt{\pi}$$

$$\int_{0}^{\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx = 1/\lambda^2$$

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x^2}\, dx = 1/4 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}$$



فهرس الكتاب

أجوبة المسائل

الباب الأول :

(٢) $3.1 \times 10^{19}\ m^{-3}$; 3.1×10^{10} molecule

(٣) $3.3 \times 10^{27}\ / m^2 . s$

(٦) 482 m/s

(١٢) 1.29×10^{-5} cm

(٢٠) 1.93×10^{10} N / m ; 3.8×10^{4} / m

(٢١) 3679 ; 68

(٢٢) 368 ; 74

(٢٣) 9.995

(٢٦) 34×10^{-9} m ; 200 ; 2.3 m/s ; 200 ; 2.2×10^{4}

الباب الثانى

(٢) 2.25×10^{-7} m ; 2.27×10^{9} / s

(٣) a R ; (a+1) R ; 7

(٤) 1.40×10^{21}

(٨) a - 34×10^{-9} m ; b - 200 ; c - 2.3 m/s
d - 200 ; e - 2.2×10^{4}

الباب الثالث

(٢) 60 μ A ; 10 cm

(٣) 1.29×10^{-5} cm

(٥) $\eta / \sqrt{T} = 9.995$

الباب الرابع

(٢) $\delta N_2 = 4 \;;\; \delta N_1 = -2$

(٣) أ - $w = \exp(12.8 \times 10^6)$

ب - $w = 1$

(٤) $N_i = \dfrac{N}{m} \;;\; S = k N \ln m \;;\; U = N w$

الباب الخامس

(٢) $\lambda = 0.91 \times 10^{-12}$ cm

(٥) $E_1 = 13.6$ eV

(٨) 0.35×10^{-25} cm / sec .

(٩) 6.6×10^{-3} eV

(١٠) $f = 0.05\, H_z \;;\; n = 3 \times 10^{33}$

$E_{n+1} - E_n = 0.2 \times 10^{-15}$ eV

(١١) 1.3 %

(١٢) $E_1 - E_0 = 10.92 \times 10^{-19}$ J ; wavelength 1840 °A

& $E_1 - E_0 = 27.30 \times 10^{-35}$ J ; $\lambda = 7.29 \times 10^{8}$ m .

الباب السادس

(٣) $v = 3.31 \times 10^{-26}$ m / s

(١٠) $f = 0.05$ Hz ; $n = 3 \times 10^{33}$

$E_{n+1} - E_n = 0.2 \times 10^{-15}$ eV

(١١) 1.3 %

(١٢) الحالة الأولى $E_0 - E_1 = 10.92 \times 10^{-19}$ J ; $\lambda = 1840$ °A

الحالة الثانية 27.30×10^{-35} J ; $\lambda = 7.29 \times 10^{8}$ m

الباب السابع

(١) $f = e / 4 \sqrt{\pi \in_0 r^3 m}$

(٢) $d\lambda = 0.157$ °A

الباب الثامن

الباب التاسع

(٣) 2.94×10^{-9} N ; - 5.14 eV

(٥) 2.33 g / cm^3

(٩) $Na^+ : 1s^2\ 2s^2\ 2p^6$ & $Cl^- : 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6$

(١١) 2 Zn O في كل خلية .

(١٢) (100) , (110) , (111) , (200) , (210) & (211)

(١٣) درجة النقاء النهائية % 10^{-5} بالوزن نحاس

عدد مرات مرور المنطقة المنصهرة 13 مرة

(١٩) 5 eV

(٢٠) 77.6 kcal / mole

الباب العاشر

(٥) $\sigma = 2.12 \times 10^{7}$ olm^{-1} m^{-1}

(٦) $\tau = 4.1 \times 10^{-13}$ sec .

distance = 410 °A

(٧) $\rho = 0.0893$ Ω . cm ; $V_H = -\ 62.5$ μ V

$0.24 \ ohm^{-1} \ cm^{-1}$ (١٠)

الباب الحادى عشر

$W = \exp(12.8 \times 10^6)$; $W = 1$ (٤)

$E_F = 9 \ eV$ (٧)

$\lambda = 0.6 \times 10^{-5}$ cm (١٧)

$N(E) = 4 \pi m / h^2$; 2 electrons (٢٢)

1260 K (٢٦)

بدون مجال $0.54 \ \mu A$ (٢٧)

في وجود المجال والنقص في $0.585 \ \mu A$ ϕ $0.015 \ eV$

5.31×10^{-8} m ; 4.6×10^2 (٢٨)

الباب الثانى عشر

$E(111) / E(100) = 3$ (٢)

$m^* / m = 0.53$ (٣)

$\rho = 1.1 \times 10^{-24} \ kgms^{-1}$; $E = 6.63 \times 10^{-19}$ J (٥)

الباب الثالث عشر

0.0529 T ; 794 A (١)

265 A ; $I_{max} = 518$ A (٢)

$E_G = 3.53 \ k T_C = 2.19 \times 10^{-3}$ eV (٤)

$E_G = h f$; $f = E_g / h$

200 A (٥)

0.028 eV (٦)

(٧) 1.65×10^{-14} T

(٨) $\Delta S = 9.83 \times 10^{-3}$ J / mol . k

(٩)

unbound e^-

$kT = 1.38 \times 10^{-23}$ J
$= 0.086$ m eV

$E_G = 0.1$ m eV

bound Cooper pair

(١٠) $\Delta B = \dfrac{\phi_0}{\pi r^2} = 0.001 \times 10^{-3}$ T

(١١) أ – 45 m T

ب – 8.0×10^{-6} Wb

جـ – 3.9×10^{9} quanta

د – 1×10^{-11} T

الباب الرابع عشر

(١) $- 0.05$ amp . m^{-1}

(٢) $\simeq - 5 \times 10^{-6}$

(٣) 2.4×10^{-27} omp m^2 عند درجة 300 k

7.2×10^{-25} amp m^2 عند درجة 1 K

(٤) 35 200 Mc / sec.

(٥) 0.66 ، 15.8×10^{5} amp m^{-1}

3140 webers m^{-2}

(٧) 9.54×10^{-5} J / T^2

(٩) $m^{*} / m = 0.75$

الباب الخامس عشر

(٢) 5.33×10^{-11} F

(٥) $12 \mu C . m$ فى الاتجاه $-x$

$3 \mu c . m$ فى اتجاه x .

(٦) 1.43×10^{-40} farad . m^{-2}

(٧) $E (Loc) / E = 1.23$

(٨) 10 kc/s : 0.1m

1 Mc/s : 10^{-3} m

10 Mc/s : 10^{-4} m

الباب السادس عشر

(١) $a = 3 \times 10^{-10}$ m

(٢) $f_{max} = 3 \times 10^{12}$ Hz

(٤) $f = 10^{13}$ Hz.

(٦) 1.51×10^{2} ; 0.63 %

الباب السابع عشر

(١) 1.5×10^{-10} cm^{2} / sec

(٢) 0.6 m m

الباب الثامن عشر

(٢) 10^{6} n m^{-2}

(٤) 13.1 °A

الباب التاسع عشر

(١) 137 cals .

(٢) 0.83 min .

(٣) 100



GLOSSARY

- A -

Adiabatic	أديباتى
Anti - parallel	عكس موازٍ
Angular distribution	توزع زاوى
Anomalous Zeeman effect	أثر زيمان الشاذ
Amorphous	لابلورى
Attractive forces	قوى جاذبة
Alloy	اشابة(سبيكة)
Activation energy	طاقة تنشيط
Atomic planes	مستويات ذرية
Allowed state	حالة مسموحة
Amplifier	مضخم
Atomic frequency	تردد ذرى
Acoustical phonon	فونون صوتى
Anelasticity	لا مرونة

- B -

Bulk modulus	معامل المرونة الحجمى
Boundary condition	حالة الحدود
Bohr magneton	ماجنتون بوهر
Binding forces	قوى الترابط
Base - centred	متمركز القاعدة
Body - centred	متمركز الجسم

Bloch walls	حوائط بلوخ
Brillouin zone	نطاق بريلوين
Bridge	قنطرة
Barkhausen effect	أثر باركهوزن
Bond length	طول الرابطة
Burger's vector	متجه بورجر

- C -

Collision Frequency	تردد التصادم
Cylindrical coordinates	إحداثيات اسطوانية
Conservation law	قانون البقاء
Collector	مجمع
Crystal	بلورة
Compressibility	انضغاطية
Core	قلب
Coupling	ربط بينى
Crystalline	بلورى
Coulomb forces	قوى كولومية
Covalent crystal	بلورة تساهمية
Covalent force	قوة تساهمية
Coordination number	عدد التناسق
Cubic	تكعيبى
Crystal systems	النظم البلورية
Crystal growth	إنماء بلورى

Crucible	بوتقة
Concentration	تركيز
Charge carriers	حاملات الشحنة
Classical theory	النظرية الكلاسيكية
Current density	كثافة تيارية
Compartment	حجره
Conduction band	نطاق توصيل
Critical field	مجال حرج
Critical temperature	درجة حرجة
Cooper pair	زوج كوبر
Cardiac arrest	سكته قلبية
Cyclotron resonanee	رنين السيكلوترون
Cooperative phenomena	ظواهر تعاونية
Curie temperature	درجة حرارة كورى
Criticism	نقد
Carbide	كربيد

- D -

Degrees of freedom	درجات حرية
Deviation	حيود
Distribution function	دالة التوزيع
Density function	دالة الكثافة
Disorder	فوضى
Discrete levels	مستويات محللة

Dual nature	طبيعة مزدوجة
Degeneracy	تحلل
Diamagnetic	ديامغنطيسى
Dipole	ثنائى قطب
Density of packing	كثافة الرص
Distribuction parameter	معامل التوزيع
Drift velocity	سرعة إزاحية
Density of energy states	كثافة مستويات الطاقة
Debye temperature	درجة حرارة ديباى
Domain	منطقة
Dielectric	عازل
Displacement	إزاحة
Dielectric constant	ثابت العزل
Debye function	دالة ديباى
Dispersion relation	علاقة التشتت
Diffusion	انتشار
Dislocation	انخلاع

- E -

Equipartition	متساوى التوزيع
Exponential function	دالة أسية
Excited state	حالة مثارة
Electron gun	مدفع إلكترونى
Entropy	أنتروبيا
Eccentricity	تطرف

- E -

Energy levels	مستويات الطاقة
Emission	انبعاث
Ether	أثير
Eigen values	قيم الطاقة
Electric dipole	ثنائى قطب كهربى
Conductivity	موصلية
Element of volume	عنصر حجم
Extrinsic	عارضة
Energy density	كثافة الطاقة
Electronic specific heat	الحرارة النوعية للإلكترونات
Energy barrier	حاجز الطاقة
Effective mass	كتلة فعالة
Electron distribution curves	منحنيات التوزيع الإلكترونى
Energy contours	خطوط تساوى الطاقة
Electron - phonon interaction	الفعل البينى الكترون – فونون
Energy gap	طاقة الثغرة
Epilipsy	صرع
Electronic polarizability	استقطابية إلكترونية
Electrostriction	الانضغاط الكهربى
Elastic after effect	مرونةمتأخرة
Edge disloeation	انخلاع حدى
Etch pit	حفرةكشطية

- F -

Functional equation	معادلةدوالية
Free path	مسار حر
Field - ion microscope	ميكروسكوب المجال الأيونى
Flexible	مطاطة
Face - centred	متمركزالوجه
Fine structure	بنية دقيقة
Fractional Hall effect	أثر هول الجزئى
Farmi - Dirac statistics	إحصاء فيرمى وديراك
Fermi energy	طاقة فيرمى
Finite	محدود
Forbidden energy band	نطاق طاقة محرم
Fermi surface	سطح فيرمى
Frictionless	عديم الاحتكاك
Flux quantum	كمة فيض
Fullerine	فولرين
Ferro magnetic	فرومغناطيسية
Ferro electricity	فروكهربية
Frequency spectrum	طيف الترددات
Frequency distribution	توزيع الترددات
Fick's diffusion laws	قوانين فيك للانتشار

- G -

Ground state	الحالة الأرضية
Gradient	ميل
G - Factor	معامل لاندى الانشطارى
Group velocity	سرعة المجموعة

- H -

Heat capacity	سعة حرارية
Hyperbola	قطع زائد
Hypothesis	فرض
Harmonic	توافقى
Harmonic oscillator	متذبذب توافقى
Hexagonal	سداسى
Hall effect	أثر هول
Hall mobility	حركية هول
Hole	ثقب

- I -

Isothermal	ايثو ثرمالى
Impact parameter	معامل التصادم
Ionization potential	جهد الإثارة
Ionic crystal	بلورة أيونية
Interstitial alloy	اشابه تخللية
Impurities	شوائب
Integral	متكامل

Intrinsic	ذاتى
Ionic polarizability	استقطابية أيونية

- J -

Josephson junction	وصلة جوزيفسن
Junction p - n -	وصلة موجب سالب

- K -

Kronig - Penny model	نموذج كرونيج وبنى
Klausius - Mosoti relation	علاقة كلاوزيوس وموزوتى

- L -

Larmor precession	رحوية لارمر
Landé splitting factor	معامل لاندى الانشطارى
Lattice point	نقطة شبيكة
Lattice parameter	البعد الشيكى
Liquidus	خط السائل
Lever rule	قاعدة ليفر
Luster	لمعة
Levitation effect	ظاهرة الرفع
Local field	مجال محلى
Lorentz field	مجال لورنتز
Lattice defects	عيوب الشبيكة
Ledge	شفه

- M -

Macroscopic	ماكروئية
Microscopic	ميكروسكوبية

Mean free path	متوسط المسار الحر
Molar specific heat	حرارة نوعية ذرية
Momentum space	فرا غ كمية الحركة
Magnetic moment	عزم مغنطيسى
Mie's rule	قاعدة مى
Molecular crystal	بلورة جزيئية
Metallic crystal	بلورة فلزية
Metal	فلز
Mono clinic	أحادية الميل
Miller indices	معاملات ميلر
Melt	مصهور
Monochromatic	أحادى اللون
Molecular velocity	سرعة جزيئية
Meissner effect	أثر ميزنر
Mechanism	ميكانيكية
Magnetic sus ceptibility	قابلية مغناطيسية
Moment	عزم
Madelung relation	علاقة ماديلنج
Multiplication of dislocations	تكاثر الانخلاعات

- N -

Nucleus	نواه
Normalization condition	الحالة العيارية
Normal triplet	الثلاثى المعتاد
Nuclear magnetic resonance	رنين نووى مغنطيسى

- O -

Orbit	مسار
Oscillator	متذبذ ب
Orthogonality condition	الحالة العمودية
Orbital quantum number	العدد الكمى المدارى
Ortho rhombic	
Opacity	إعتام
Occupation probility	احتمال الاشغال
Overlapped zones	نطاقات متداخلة
Oscilloscope	راسم الذبذبات
Orientation	اتجاهية
Orientation polarizability	استقطابية اتجاهية
Order - disorder transformation	تحول من منظم إلى غير منظم
Optical phonon	فوتون ضوئى

- P -

Point mass	كتلة نقطية
Probable	محتمل
Partition function	دالة التقسيم
Particle	جسيم
Plane harmonic wave	موجة توافقية مستوية
Probability density	كثافة الاحتمال
Potential well	بئر جهد

Pauli principle	مبدأ باولى
Periodic table	الجدول الدورى
Paramagnetic	بارا مغنطيسى
Packing	رص
Polycrystalline	متعدد الحبيبات
Polarization	استقطاب
Phase	طور
Powder	مسحوق
Permittivity	نفاذية
Permiability	سماحية
Photon	فوتون
Phase space	فرا غ الطور
periodic potential	جهد دورى
Plane waves	أمواج مستوية
Particle velocity	سرعة الجسيم
Plateau	مصطبة
Precession frequency	تردد رحوى
Paramagnetic resonance	رنين بارا مغناطيسى
Peroveskite	بروفسكيت
Polarization catastrophy	كارثة الاستقطاب
Piezo electricity	الكهرضغطية
Phonon	فونون
Phase transformation	تحول طورى
Plastic flow	تدفق لدن

- Q -

Quantization	تكمية
Quantum	كمة
Quantization principle	المبدأ الكمى
Quantum statistics	إحصاءكمى

- R -

Radio tracer	مشع اقتفائى
Radial quantum number	العدد الكمى النصف قطرى
Remenant	متبقية
Remenant magnetism	مغنطيسية متبقية
Relaxation spectrum	طيف الإرخاء
Rocking curve	منحنى القلقلة

- S -

Shell	قشرة (صدفة)
Slit	فتحة مستطيلة
Statistical	إحصائى
Shearing force	قوة قاصة
Spherical	إحداثيات كرية
Stirling's approximation	تقريب سترلنج
Scattering	استطارة
Stationary orbit	مدار مستقر
Spectrum	طيف
Spiral net	شبكة حلزونية
Schrodinger equation	معادلة شرودنجر

Space quantization	تكمية الفراغ
Splitting	انشطار (تجزئة)
Spin	لف
Subshell	تحت الصدفة
Selection rule	قاعدة الاختيار
Spin - orbit interaction	الفعل اللفى المدارى
Super cooled liquid	سائل فوق مبرد
Space lattice	شبيكة فراغية
Seed crystal	بذرة بلورة
Solid solution	محلول صلب
Structure analysis	تحليل بنيوى
Substitutional alloy	اشابه تبادلية
Solidus	خط الجامد
Stationary waves	أمواج موقوفة
Semi conductor	شبه موصل
Super conductivity	موصلية فائقة
Squid	السكويد
Stress	إجهاد
Strain	انفعال
Slip plane	مستوى الانزلاق

- T -

Thermodynamic equilibrium	اتزان ديناميكى حرارى
Thermal agitation	تهييج حرارى
Transport phenomena	ظواهر الانتقال

Thermal conductivity	معامل توصيل حرارى
Thermodynamic probability	الاحتمال الديناميكى الحرارى
Tunnel effect	ظاهرة الإنفاق
Transition	انتقال
Triclinic	ثلاثية الميل
Trigonal	ثلاثية الوجه
Tetragonal	
Tolman effect	أثر تولمان
Thermionic emission	انبعاث ثرميونى
Type I	النوع الأول
Threshold voltage	فلطية العتبة
Trapping	اصطياد

- V -

Viscosity	لزوجة
Velocity spase	فراغ السرعات
Valence	تكافؤ
Van der Waal forces	قوى فان درفال
Void	فراغه
Valence band	نطاق التكافؤ
Vortex lines	خطوط دوامية
Vacancy	شاغرة

- U -

Uncertainty priniple	مبدأ عدم اليقين
Unit cell	وحدة الخلية

هذا الكتاب

كان تطور علـم الفيزياء فى القرن العـشرين بمثابة ثورة شاملة فى مفاهيمنا لطبيعة المادة والطاقة والإشعاع ،اقتضى التطور تقسيم علم الفيزياء إلي فيزياء كلاسيكية وأخري معاصرة

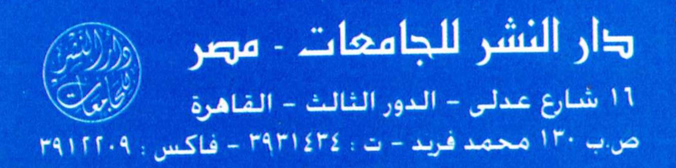
ولما كان التطور التكنولوجى الكبير المصاحب لهذه الاكتشافات فى حاجة دائما إلى نوعيات خاصة جدا من المواد التى لها صفات يستلزمها نجاح المشروعات الضخمة التى تقوم بها الدول لذلك أصبح الاهتمام بتدريس الطبيعة الذرية للمادة وأثرها علي الخواص الماكروسكوبية أمرا ضروريا .

وهذا الكتاب ييسر لكل طالب سبل المعرفة بأحدث النظريات فى تركيب المادة ومكوناتها الأساسية، كما يتيح كذلك تفسير الظواهر الطبيعية التى تنشأ عن التجمعات الذرية أو الجزئية وكيفية معالجتها بأسلوب إحصائى.

ولقد تعددت الكتب الأجنبية التى تعنى بطبيعة الجوامد والحالة المكثفة، وكان لزاما على العلماء العرب إثراء المكتبة العربية فى هذا الموضوع الهام ، بما يساعد الطالب على فهم القوانين التى تحكم هذا العالم الواسع.

ويسر دار النشر للجامعات أن تتقدم بهذا الكتاب إلى كل المهتمين بدراسة فيزياء الجوامد ، والله الموفق.

الناشر



دار النشر للجامعات - مصر
١٦ شارع عدلى - الدور الثالث - القاهرة
ص.ب ١٣٠ محمد فريد - ت : ٢٩٣١٤٣٤ - فاكس : ٣٩١٢٢٠٩